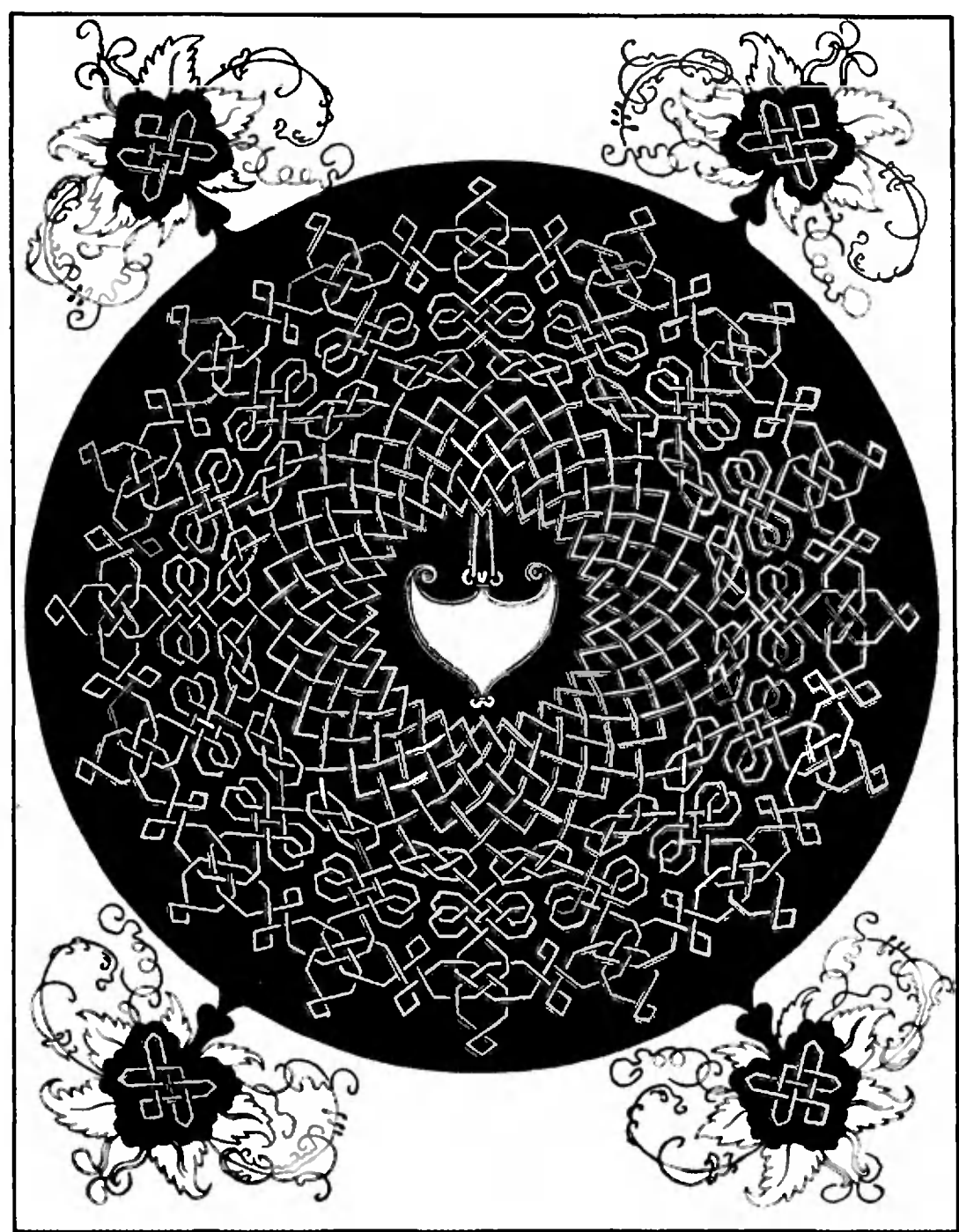
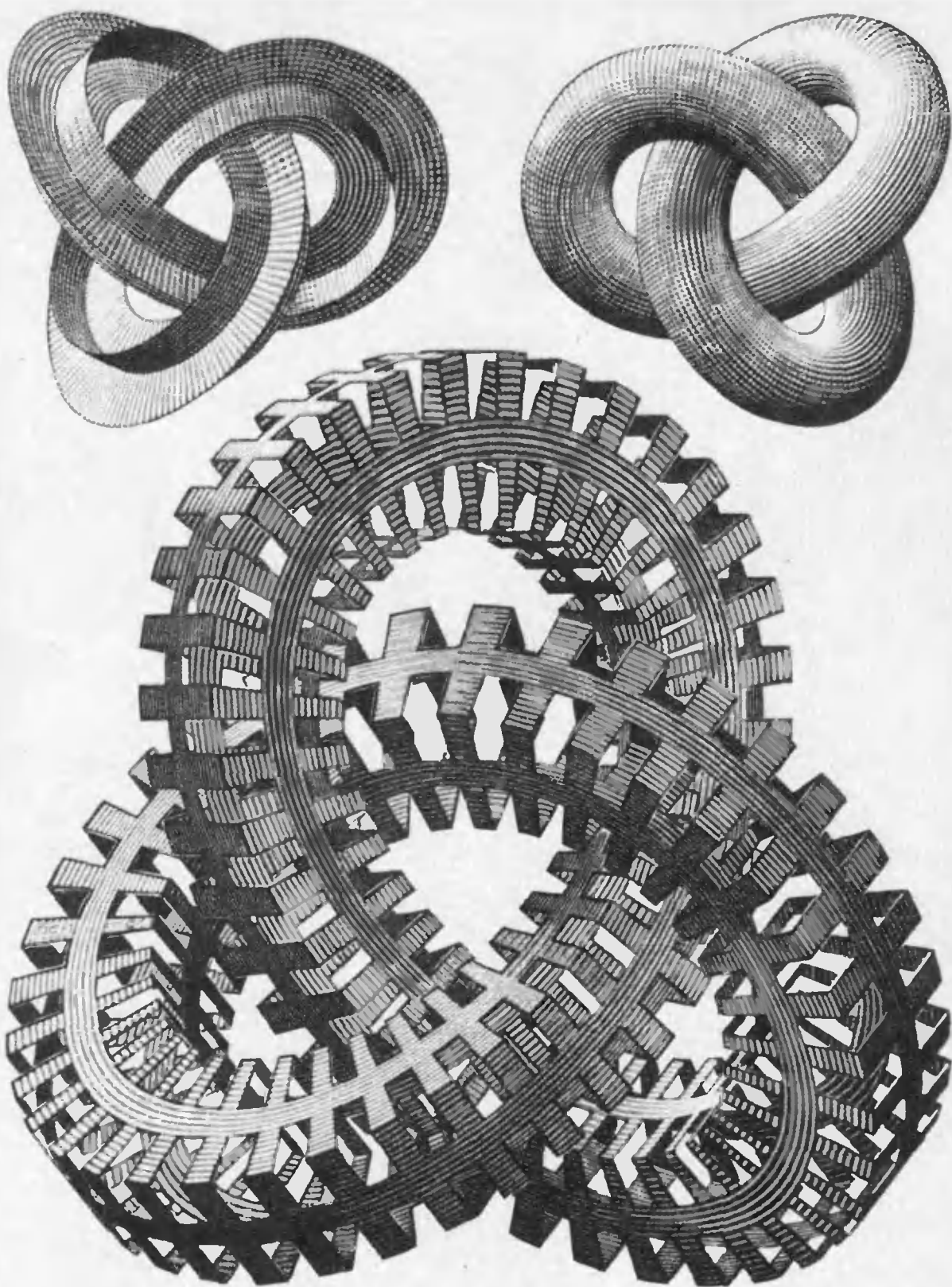


Квант

3
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Гравюры, воспроизведенные на первой и второй страницах обложки, их авторы — немецкий художник XVI века Альбрехт Дюрер и современный голландский художник Морис Эшер — назвали одинаково: «Узел». На языке математики на гравюре

Дюрера изображено зацепление из нескольких узлов (можно ли их распепить? какие из них можно развязать?), на гравюре Эшера — узел «трилистник» (можно ли развязать его?). Ответить на эти вопросы вам поможет статья «Раскрашенные узлы».

Квант

3

1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ



В НОМЕРЕ:

Ученые обращаются к молодежи

2 С. Соболев. На школьной парте будь исследователем

* * *

4 А. Варламов. О снежках, орехах, пузырьках и ...
жидком гелии

8 О. Виро. Раскрытые узлы

14 Амеба ... в пиджаке

Лаборатория «Кванта»

16 И. Ростовцев. Сделать опыт Юнга? Это не так сложно

Математический кружок

18 В. Евстигнеев. Графы и программы

23 Победители конкурса «Кванта»

Задачник «Кванта»

24 Задачи М671—М675; Ф683—Ф687

26 Решения задач М622—М624, М626, М627; Ф631—Ф637

33 Н. Васильев. К центру тяжести

35 Список читателей, приславших правильные решения задач
из Задачника «Кванта»

«Квант» для младших школьников

37 Задачи

38 Ф. Бартнев, И. Никольская. О пользе нелепостей

По страницам школьных учебников

43 О. Овчинников. Что же покажет динамометр?

Практикум абитуриента

46 В. Можаяв. Колебания

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1980 году

51 Московский государственный университет им. М. В.
Ломоносова

Искусство программирования

57 Заочная школа программирования. Урок 14

Информация

60 В. Комаров. Отдых и занятия наукой

61 Шахматная страничка

62 Ответы, указания, решения

Шахматный конкурс (3-й с. обложки)

Смесь (15)

Главный редактор
академик И. К. Киконин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Каница
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешконцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шапкольская
С. И. Шварцбург
А. И. Ширшов

С. Соболев

На школьной парте будь исследователем



В последнее время много внимания уделяется выбору жизненного пути, тому, как найти свою правильную дорогу. Иногда это бывает так трудно сделать! Ведь многое в жизни кажется интересным и увлекательным, не правда ли? Бывает так, что молодой человек больше всего любит стихи и музыку, но с увлечением решает трудные математические задачи, способен до поздней ночи сидеть с паяльником, сооружая свой собственный радиоприемник.

А другим выпускникам школы все равно куда идти, их ничего сильно не увлекает. Математика, в частности, рассуждают они, — это скука. История — еще хуже, чего стоят одни хронологические таблицы, обилие исторических имен...

Жизненный путь ученого начинается обычно рано. Еще в школьные годы, за партой, пробуждается у него жажда знаний. Одного юношу увлекают сложные математические построения, красота и стройность математических теорий. Другого тянет мир химических или физических явлений, третий с жадностью изучает египетские иероглифы.

Именно в школьные годы у будущего исследователя накапливается первый запас знаний, выковываются воля, характер, упорство и, наконец, укрепляется любовь к своему делу.

На школьной парте, в туристском походе, на колхозном поле, в цехе теля, молодой друг, непрестанно должны волновать вопросы: как, почему, отчего? Разве не увлекательно, например, докопаться будущему математику, какие силы испытывает реактивный самолет со стороны воздуха, который он разрезает? Зачем у быстроходных самолетов делают загнутые

Академик Сергей Львович Соболев — Герой Социалистического Труда, директор Института математики Сибирского отделения Академии наук СССР.

Статья перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

назад крылья? Как рассчитать частоту колебаний какой-либо детали машины, чтобы избежать резонанса?

Для достижения той или иной цели мало одного желания. Надо еще иметь крепкие знания, видеть интересующие тебя вещи в окружающей среде, уметь наблюдать их взаимосвязь. Это, конечно, трудно. Но ведь у советских людей, а тем более у советских ученых, есть хороший принцип: чем труднее, тем интереснее. Не пасовать перед трудностями, не огорчаться при неудачах.

Вспомните, например, знаменитого русского математика Александра Михайловича Ляпунова. В юности он получил от своего учителя, другого знаменитого математика Пафнутия Львовича Чебышева очень трудную задачу. Эта задача состояла в том, чтобы рассчитать устойчивость фигур равновесия вращающейся жидкости. Хотелось подойти к проблеме образования небесных тел, входящих в состав Солнечной системы. Если бы движение огненно-жидкого шара, каким представлялось Солнце, было неустойчивым, от него могли бы оторваться части и дать начало новым телам — планетам.

Ляпунов долго не мог справиться с этой задачей. Его попытки, одна за другой, были безуспешны. Только через двадцать лет после того, как он начал думать над этим вопросом, ученый дал, наконец, решение задачи, принесшее ему мировую славу. В процессе работы ему пришлось создать множество новых идей и понятий, до тех пор неизвестных. Он вывел общую теорию устойчивости движения, перестроил существовавшую к тому времени несовершенную теорию потенциала тяготения, заложил основы будущей теории интегральных уравнений и многое-многое другое. Этот пример — убедительное подтверждение того, как важно верить в свои силы, быть целеустремленным, стремиться дерзать.

Нам, кому выпала честь строить первое в мире социалистическое государство, по праву можно называть себя строителями коммунизма. Вам, кто сегодня еще учится, наверняка придется жить в этом обществе. Наше поколение немало потрудились, но и для вас в любой отрасли науки, народного хозяйства будет еще немало увлекательных дел.

Если ты, юный друг, собираешься быть математиком, то не только сам стремись познавать эту замечательную науку, но и старайся быть хорошим организатором. Создавай школьные математические кружки, будь инициативным участником математических олимпиад, конкурсов, посещай те кружки, которые открыты при университетах и институтах. Как и у каждой науки, у математики славное прошлое и замечательное будущее.

За последнее время математика приобрела особую популярность. После создания математических машин всем стало ясно, каковы ее возможности. Вся история точных наук — это почти история математики: так тесно связана она с каждой из них. Дерзать на этом благодатном поприще — значит много и вдумчиво работать, неустанно искать. Стать разведчиком нового можно и в школьные годы.

А. Варламов

О снежках, орехах, пузырьках и... жидком гелии

Хотя гелий и находится почти в самом начале таблицы Менделеева, но с момента открытия он доставил физикам массу хлопот необычностью своих свойств. Правда, хлопоты с лихвой окупаются красотой и уникальностью физических явлений, происходящих в жидком гелии, а также использованием многих этих свойств в современных физических лабораториях. Это — и каждодневное получение низких температур (температура кипения жидкого гелия при атмосферном давлении — 4,2 К), и исследования явления сверхтекучести, открытого в жидком гелии П. Л. Капицей в 1936 году, и получение сверхнизких температур (вплоть до 0,001 К), и многое другое.

Одним из замечательных свойств жидкого гелия является необычный механизм переноса в нем заряда.

Носителями заряда в жидкости, как правило, служат электроны и ионы. Можно представить также процесс, при котором электрон «перепрыгивает» со своего атома на оказавшийся рядом ион, на его освободившееся место «перепрыгивает» электрон с соседнего атома, на место этого электрона — третий со следующего атома, и так далее. Со стороны такая чехарда электронов выглядит как движение положительного заряда в противоположную сторону. А так как на самом деле этого положительного заряда

нет, а есть просто отсутствие электрона на своем «рабочем месте», то такой объект называют «дыркой». Движение как электронов, так и дырок происходит в очень сложных полях большого числа атомов. В свое время задачи такого сорта — о движении электронов в твердом теле или жидкости — доставили физикам много хлопот. Но в результате были созданы специальные методы расчета свойств систем многих частиц. Оказывается, в такой системе частицы в большой степени теряют свои индивидуальные качества. Даже понятие массы становится гораздо более сложным, чем привычное нам свойство инертности. В этих условиях частице приписывают так называемую эффективную массу, которая является важной характеристикой частицы, учитывающей ее взаимодействие с атомами окружающей среды. Если мысленно «выключить» все взаимодействия, то эффективная масса частицы переходит в ее обычную массу.

Была выдвинута гипотеза, что заряд в жидком гелии переносят электроны и дырки. Их движение должно было быть почти свободным из-за малой плотности гелия и слабого взаимодействия его атомов с заряженными частицами. Поэтому и эффективные массы таких заряженных частиц должны были бы быть близкими к массе свободного электрона.

Для измерения масс носителей положительного и отрицательного заряда исследовались их траектории в жидком гелии при наложении однородного магнитного поля. Зная начальную скорость частицы и величину магнитного поля, измерив радиус круговой траектории частицы, легко определить ее массу. Результаты этих экспериментов оказались весьма неожиданными: массы носителей положительного и отрицательного зарядов в десятки тысяч раз превышали массу свободного электрона!

Столь разительное отличие теоретических расчетов и экспериментальных данных непозволительно даже для необычного гелия. Поэтому

необходимо было предложить какой-то другой, не такой, как у обычной жидкости, механизм переноса заряда в жидком гелии. Объяснение структуры носителя положительного заряда было предложено американским физиком Аткинсом. Оказалось, что вся «хитрость» заключена в сравнительно низком давлении затвердевания жидкого гелия: при достаточно низких температурах $p_{тв} = 25$ атм. Именно этот факт и приводит к весьма необычной структуре носителей положительного заряда в жидком гелии.

Известно, что в жидком гелии существуют положительные ионы, которые достаточно хорошо сохраняют свой заряд. Взаимодействие положительного иона с молекулой He_2 приводит к тому, что ее электроны чуть-чуть изменяют свои орбиты, притягиваясь к положительному иону, а положительно заряженные ядра атомов, наоборот, отталкиваются от него. В результате, центры отрицательного и положительного зарядов в молекуле оказываются разнесенными на некоторое расстояние. Таким образом, наличие положительных ионов в толще жидкого гелия приводит к поляризации его молекул. Поляризованные молекулы притягиваются к положительному иону. Это притяжение приводит к повышению концентрации молекул (то есть к появлению избыточной плотности), а следовательно, и к повышению давления по мере приближения к иону. Графически зависимость избыточного давления от расстояния r до иона показана на рисунке 1.

Как мы уже говорили, при давлении в 25 атм жидкий гелий затвердевает. Поэтому как только давление вблизи положительного иона достигнет этой величины, соответствующий объем жидкого гелия затвердеет. Как видно из рисунка 1, при малом внешнем давлении затвердевание происходит на расстоянии $r_0 = 7 \text{ \AA}$ от иона. Таким образом, положительный ион оказывается как бы «вмерзшим» в «снежок» из твердого гелия. Так как центр этого снежка положительно заряжен, то при его движении в жидком гелии

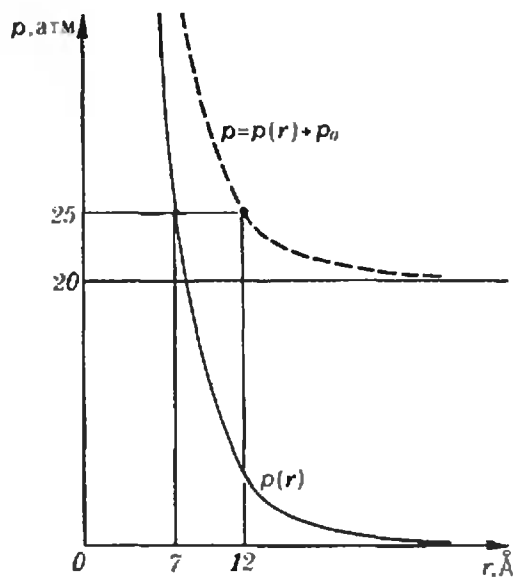


Рис. 1.

за ним «тянется хвост» избыточной плотности.

Теперь мы можем оценить массу положительного заряда, движущегося в жидком гелии. Масса самого снежка равна $\frac{4}{3} \pi \rho r_0^3 = 32 m_0$, где m_0 — масса атома гелия (ρ — плотность твердого гелия). Массу «хвоста» избыточной плотности, который тянется за снежком, можно оценить так: зная зависимость давления от расстояния до центра снежка (то есть до самого иона), можно легко найти, как меняется в зависимости от этого расстояния избыточная плотность гелия; далее мысленно разбиваем жидкость вокруг снежка на сферические слои малой толщины (такие, что на толщине слоя плотность можно считать постоянной) и вычисляем массу каждого такого слоя; суммируя затем вес эти массы, мы находим полную массу «хвоста», которая оказывается равной $28 m_0$.

Кроме того, при движении тела в жидкости происходит перемещение ее слоев. Это приводит к тому, что тело движется так, как если бы его масса была на некоторую величину больше его истинной массы. Эту дополнительную массу, связанную с перемещением жидкости, называют присоединенной массой (см., например, статью Г. Коткина

в «Кванте» № 1 за 1976 год). Для «снежка», движущегося в жидком гелии, присоединенная масса оказывается равной $15 m_0$.

Итак, для полной массы положительного заряда, движущегося в жидком гелии, расчет дает значение $75 m_0$. Это значение уже хорошо согласуется с величиной, найденной экспериментально.

Совсем по-другому обстоит дело с носителями отрицательного заряда. Оказывается, отрицательно заряженных ионов гелия не существует, и следовательно, построить «снежок» с отрицательным ионом внутри невозможно. Поэтому единственным претендентом в носители отрицательного заряда в жидком гелии остается электрон.

Из эксперимента известно, что электрон не может беспрепятственно проникнуть в жидкий гелий через его поверхность. Этот факт качественно нетрудно понять. Как вы знаете из курса химии, гелий — инертный газ, поэтому его первая электронная оболочка полностью застроена, а следующей застраиваться еще рано — заряд ядра всего лишь $2e^+$, и появление третьего электрона в оболочке энергетически невозможно. Поэтому электрон не может приблизиться к атому гелия слишком близко (точно так же обстоит дело и с молекулой гелия) — на близких расстояниях он отталкивается. Таким образом, чтобы загнать электрон через поверхность в толщу жидкого гелия, необходимо совершить некоторую «работу входа». Итальянские физики Каррери, Фазоли и Газта предположили, что именно благодаря этой энергии электрон, проникающий в толщу гелия через поверхность, «расталкивает» молекулы гелия, к которым он не имеет права приблизиться слишком близко, и образует вокруг себя сферически-симметричную полость — своеобразный пузырек (рис. 2).

Размеры такого пузырька можно оценить, рассматривая условие равновесия его границы. Хотя на близких расстояниях электрон и отталкивается от молекул гелия, но с достаточно удаленными молекулами он поступает точно так же, как и положитель-

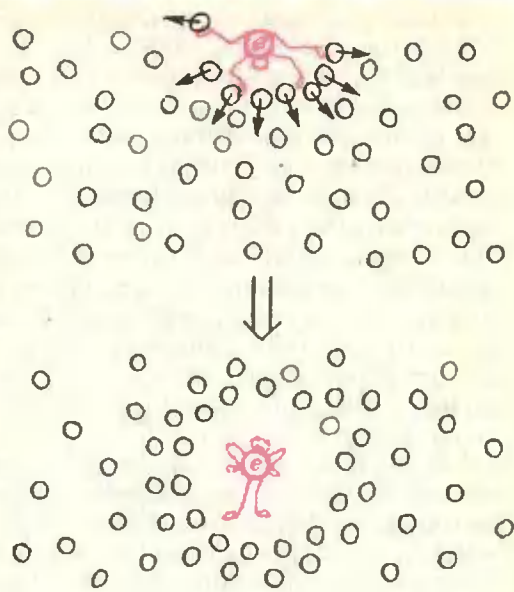


Рис. 2.

ный ион — он поляризует их. Поэтому на больших расстояниях взаимодействие электрона с молекулой He_2 будет точно таким же, как и в рассмотренном уже случае «снежка». Следовательно, по мере приближения к «пузырьку» избыточное давление в гелии возрастает по тому же закону (см. рис. 1). Однако в случае малого внешнего давления на границе пузырька оно еще остается гораздо меньше 25 атм из-за сравнительно большого размера пузырька. Кроме этого давления, связанного с избыточной плотностью поляризованного гелия, на границе пузырька действуют силы поверхностного натяжения, направленные так же, как и силы избыточного давления — к центру пузырька. Что же уравнивает эти силы? Оказывается, противодействие им создает сам электрон. Находясь внутри пузырька, электрон как бы «мечется» по нему, отражаясь от границ. В результате соударения со стенками создается некоторое давление, которое и компенсирует полное давление извне. Иными словами, электрон внутри пузырька «ведет себя» подобно газу в закрытом сосуде. Расчеты показывают, что при малом внешнем давлении радиус R_0 такого пузырька оказывается порядка 20 \AA .

Итак, мы выяснили, что носителями отрицательного заряда в жид-

ком гелия являются пузырьки с электроном внутри. Масса таких носителей вычисляется так же, как и масса «снежков». Однако теперь собственной массы пузырька практически нет — она равна массе электрона и пренебрежимо мала по сравнению с массой увлекаемой жидкости. Аналогичный вышеизложенному метод расчета дает для полной массы носителя отрицательного заряда величину $245 m_0$.

Теперь посмотрим, как влияет на носителей зарядов рост внешнего давления p_0 . На рисунке 1 показана зависимость полного давления в гелии (с учетом внешнего давления) от расстояния до иона для $p_0^* = 20$ атм. Такая зависимость для произвольного внешнего давления $p_0 < 25$ атм получается переносом зависимости для $p_0 = 0$ вдоль оси ординат. Как видно из рисунка 1, чем больше внешнее давление, тем на большем расстоянии от иона полное давление становится равным 25 атм. Поэтому с ростом внешнего давления «снежок» ведет себя подобно снежному кому: он стремительно обрастает «снегом» — твердым гелием, становясь все больше и больше в размере. Зависимость $r(p_0)$ размера «снежка» от внешнего давления показана на рисунке 3.

А как ведет себя с ростом внешнего давления пузырек? До поры до времени, подобно любому пузырьку в жидкости, при нарастании внешнего давления он просто сжимается. Его радиус R уменьшается, как это показано на рисунке 3. Но вот при давлении

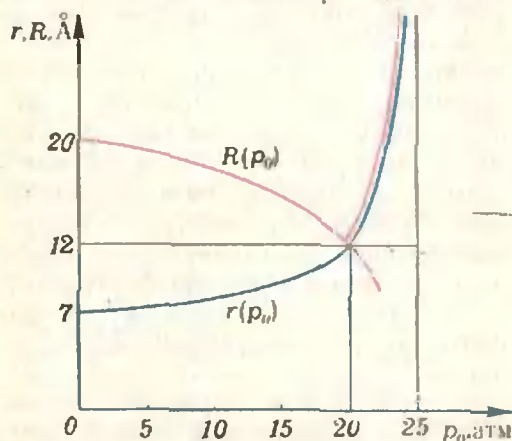
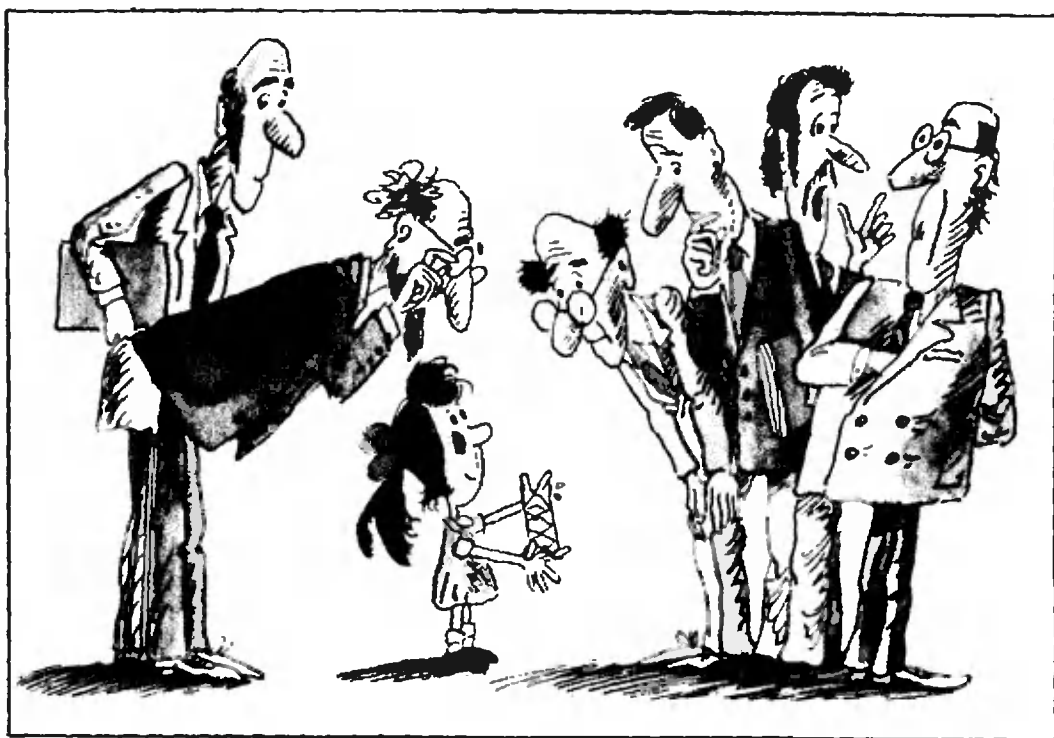


Рис. 3.

$p_0^* = 20$ атм графики $r(p_0)$ и $R(p_0)$ пересекаются — размеры пузырька и «снежка» становятся одинаковыми и равными 12 Å. Что будет делать «снежок» при дальнейшем увеличении давления, мы знаем — он будет стремительно наращивать свои размеры за счет затвердевающего на его поверхности гелия. А как вести себя пузырьку — сжиматься дальше (пунктирная линия на рисунке 3)? Но вот тут-то пузырек и проявляет свой нрав — при дальнейшем повышении давления он подобно «снежку» начинает обрастать ледяной коркой из твердого гелия. Действительно, как это видно из рисунка 1, при внешнем давлении 20 атм полное давление на границе пузырька (12 Å от его центра) становится равным 25 атм, то есть достигает давления затвердевания жидкого гелия. Пузырек при этом «сдевается в ледяную скорлупу», внутренний радиус которой при дальнейшем повышении давления остается приблизительно постоянным, а внешний в точности равен размеру «снежка» при соответствующем давлении.

Итак, при внешних давлениях больше $p_0^* = 20$ атм пузырьки обрастают ледяной скорлупой и превращаются, таким образом, в некое подобие орехов. Однако ядрышко у этих «орехов» весьма своеобразное — это электрон, который «мечется» внутри скорлупы из твердого гелия.

Остается добавить, что при $p_0 \rightarrow 25$ атм внешний радиус «ореха», как и «снежка», стремится к бесконечности, что соответствует полному затвердеванию жидкого гелия во всем объеме. В твердом гелии носителями отрицательного заряда оказываются вмержшие пузырьки с размерами, равными внутреннему радиусу бывшего «ореха» — примерно 12 Å. Положительный заряд переносят вмержшие ионы гелия — остатки бывших «снежков». Однако теперь переносить заряды не так-то просто — ведь они находятся в твердом веществе. Поэтому и подвижность у этих носителей гораздо ниже, чем у «снежков» и пузырьков в жидком гелии.



О. Виро

Раскрашенные узлы

Что такое узел

Занимаясь каким-нибудь предметом из реальной жизни, математики обычно заменяют его подходящим математическим объектом. Не избежал этой участи и веревочный узел — он был превращен в узел математический.

Прототип математического узла — это заузленный кусок веревки с закрепленными концами.

Одним из вопросов, побудивших математиков заняться узлами, был вопрос, какие узлы можно развязать, не порвав, и какие нельзя.

Концы веревки приходится закреплять, потому что если не запретить ими манипулировать, все узлы окажутся одинаково завязанными (в самом деле, любой узел на веревке можно развязать, протягивая конец веревки поочередно через петли узла).

Более удобный способ избавиться от заботы о концах веревки — соединить их друг с другом. Эта операция показана на рисунке 1. В результате кусок веревки превращается в заузленное кольцо.

Следующий шаг к математическому узлу — замена веревки линией — осью веревки.

Не всякая линия способна быть осью веревки. Например, кривую с бесконечной последовательностью бесконечно убывающих узелков (рис. 2) невозможно «нарастить» до веревки конечной толщины. Кривые такого рода рассматриваются в математике; они называются *дикими узлами*.

Мы не будем здесь заниматься дикими узлами и, чтобы исключить их, примем следующее определение: *полигональным узлом* называется замкнутая, связная, не имеющая точек самопересечения пространственная ломаная, составленная из конечного числа прямолинейных отрезков.

Это определение вполне соответствует нашему наглядному представлению об узлах. Любой полигональный узел можно нарастить до веревочного кольца и в любом веревочном кольце можно найти ось, со-

ставленную из конечного числа отрезков.

Слово «связная» в определении полигонального узла означает, что ломаная не представляется в виде объединения нескольких замкнутых ломаных. Если не настаивать на связности, то получится определение *полигонального зацепления*. На рисунке 3 изображены полигональные узлы, а на рисунке 4 — полигональные зацепления, не являющиеся узлами.

Поскольку в этой статье все узлы и зацепления будут полигональными, слово «полигональный» будет для краткости опускаться.

Как нарисовать узел

При изображении узла выбирают такую точку наблюдения, чтобы, во-первых узел лежал по одну сторону от некоторой плоскости, проходящей через эту точку, и, во-вторых, чтобы никакие три звена узла не казались из нее проходящими через одну точку. Выполнения первого условия можно достичь, выбрав точку наблюдения достаточно далеко от узла. Из удовлетворяющей этому условию точки весь узел можно спроектировать на плоскость, то есть как бы охватить одним взглядом. Для выполнения второго условия нужно, чтобы всякая прямая, проходящая через точку наблюдения, задевала не более двух звеньев узла. Выполнения этого условия можно достичь сколь угодно малым смещением точки наблюдения.

В том месте, где изображения двух непересекающихся звеньев узла пересекаются, нужно указать, какое звено проходит ближе, а какое — дальше. Для этого изображение дальнего звена прерывают, как это сделано на рисунках 3 и 4.

Изображение узла, выполненное с соблюдением этих правил, называется *диаграммой* узла.

Что значит «одинаково заузленные» узлы

Веревоочные кольца, которые получают друг из друга в результате изгибов, растяжений, сжатий и других непрерывных деформаций, естествен-

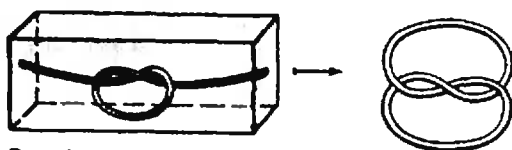


Рис. 1.

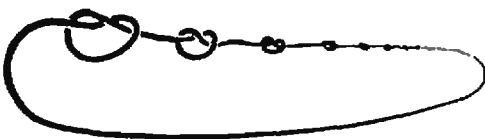


Рис. 2.

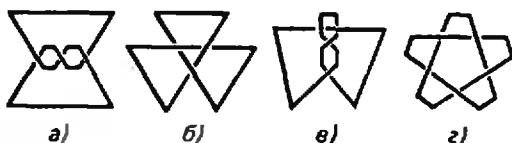


Рис. 3.

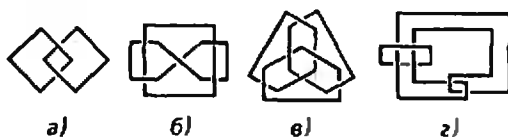


Рис. 4.

но считать *одинаково заузленными*. Это наглядное представление об одинаковой заузленности при переходе к полигональным узлам превращается в понятие *изотопности*: два узла (или, более общо, два зацепления) называются *изотопными*, если от одного к другому можно перейти, последовательно выполняя преобразования, которые называются *элементарными изотопиями*. *Элементарная изотопия* — это или замена одного из звеньев узла двумя новыми отрезками, которые вместе с ним образуют контур треугольника, пересекающегося с прежним узлом только по замененному звену*), или обратная операция — замена двух соседних звеньев одним отрезком, который вместе с ними образует контур треугольника, пересекающегося с прежним узлом только по заменяемому звену. На рисунке 5 показаны два узла, получающиеся друг из друга элементарной изотопией.

*Эти «два новых отрезка» вместе с замененным звеном могут образовывать «сварженный» треугольник — отрезок. В этом случае элементарная изотопия сводится к добавлению внутри звена новой вершины.

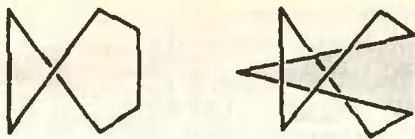


Рис. 5.

Треугольник, участвующий в определении элементарной изотопии, нужно воспринимать как траекторию деформации.

У п р а ж н е н и е 1. Докажите, что узлы с одинаковыми диаграммами изотопны.

Узел, изотопный контуру треугольника, называется *тривиальным*. Узлы, изображенные на рисунке 5, тривиальны. Последовательность элементарных изотопий, соединяющих их с контуром треугольника, показана на рисунке 6.

Ясно, что контуры любых двух треугольников изотопны, так что все тривиальные узлы изотопны друг другу. Тем не менее, тривиальные узлы могут быть весьма замысловатыми.

У п р а ж н е н и я

2. Докажите тривиальность узлов, изображенных на рисунке 7.

3. Докажите, что узлы, изображенные на рисунках, 3, а и 3, б, изотопны.

Как доказывать неизотопность узлов

Определение изотопности немедленно ставит перед нами проблему: *существуют ли неизотопные узлы?*

Пока мы не сможем ответить на этот вопрос, все узлы будут для нас «на одно лицо».

Мы знаем, что очень затейливые узлы могут оказаться тривиаль-

ными. С другой стороны, если мы попытаемся развязать веревочное кольцо, изображенное на рисунке 8, а, то скоро придем к убеждению, что это невозможно. Но как доказать соответствующее математическое утверждение? Как доказать, что изображенный на рисунке 8, б узел нетривиален? (Этот узел носит название *трилистник*.)

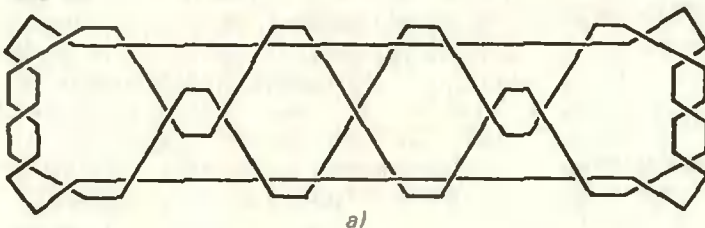
Напомним, что нетривиальность узла — это невозможность его превращения при помощи элементарных изотопий в контур треугольника. Сложность знакомых нам примеров тривиальных узлов (см. рис. 7) показывает, как нелегко по виду узла узнать, тривиален он или нет. Единственный мыслимый способ доказательства нетривиальности узла — найти какое-нибудь свойство узлов, сохраняющееся при элементарных изотопиях, которым наш узел обладает, а контур треугольника не обладает.

Свойство узла, сохраняющееся при элементарных изотопиях, называется *инвариантным свойством* или просто *инвариантом* узла (инвариант — слово латинского происхождения, буквально означает «неизменный»).

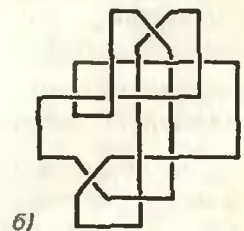
В теории узлов изучаются главным образом их инвариантные свойства. Примером инвариантного свойства может служить тривиальность. Легко определить и много других инвариантов. Например, инвариантами узла являются наименьшее из чисел звеньев и наименьшее из чисел скрещиваний в диаграммах изотопных ему узлов.



Рис. 6.



а)



б)

Рис. 7.

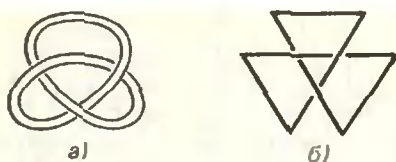


Рис. 8.

Однако введение этих и многих аналогичных инвариантов не помогает решить старые вопросы, а приводит к постановке новых. Дело в том, что вычисление этих инвариантов вызывает те же затруднения, что и доказательство нетривиальности узла.

Помочь при доказательстве нетривиальности узла может только легко вычисляемый инвариант, определяющийся не через целый класс изотопных узлов, а непосредственно по диаграмме узла. Такой инвариант мы сейчас введем.

Раскрашиваем диаграммы узлов в три цвета

Напомню, что диаграмма узла — это его изображение на плоскости, в котором изображения никаких трех звеньев не проходят через одну точку и в местах, где должны были бы пересекаться изображения непересекающихся звеньев, изображение дальнего звена прерывается. Из-за этих прерываний диаграмма узла оказывается составленной из нескольких непересекающихся ломаных. Эти ломаные будем называть *участками* диаграммы. Их число равно числу прерываний, то есть числу скрещиваний.

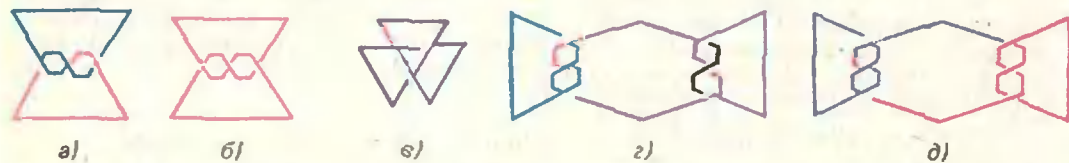
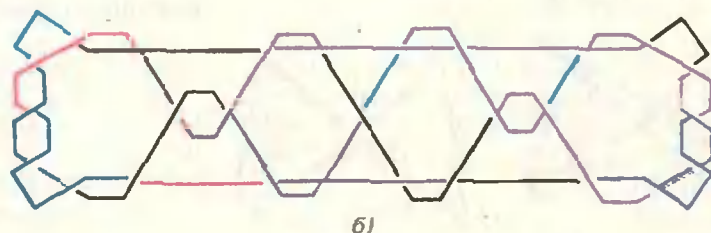


Рис. 9.



Рис. 10.



Для доказательства неизотопности узлов оказывается полезно раскрашивать их диаграммы, соблюдая некоторые правила.

Раскраску диаграммы узла в черный, красный и синий цвета будем называть *правильной*, если каждый ее участок окрашен в один цвет и вблизи каждой точки скрещивания либо все три участка окрашены в один цвет, либо встречаются все три цвета. Примеры правильной раскраски показаны на рисунке 9, примеры *неправильной* — на рисунке 10.

Упражнения

4. Докажите, что диаграммы узлов, изображенные на рисунках 6 и 7, нельзя правильно раскрасить, используя все три цвета, то есть докажите, что эти диаграммы допускают только три одноцветные правильные раскраски.

5. Докажите, что число правильных раскрасок диаграммы трилистника (рис. 8, б) равно девяти.

Теорема 1 (Основная теорема о трехцветных раскрасках). *Число правильных раскрасок диаграммы узла в три цвета является инвариантом узла.*

Прежде чем доказывать теорему 1, обсудим некоторые ее применения. Вот простейшее следствие:

Следствие 1. *Если диаграмма узла допускает правильную раскраску, в которой участвуют все три цвета, то узел нетривиален.*

Это следствие сразу позволяет получить результат, сформулированный в упражнении 4 (узлы, о которых там идет речь, тривиальны). Но неизмеримо важнее то, что из него вытекает нетривиальность трилистника и многих других узлов.

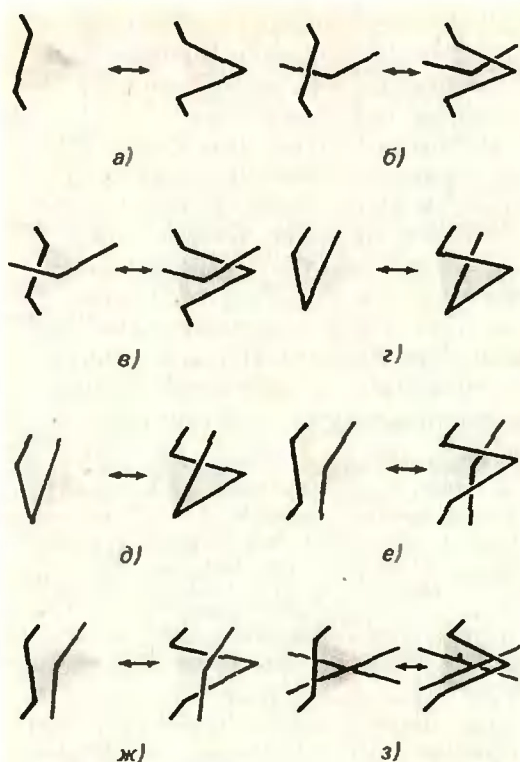


Рис. 11.

Упражнение 6. Докажите (опираясь на теорему 1), что трилистник не изотопен узлам, изображенным на рисунках 3, в и 3, г, и что узел, изображенный на рисунке 9, г, не изотопен ни трилистнику, ни этим узлам.

Узлы, изображенные на рисунках 3, в и 3, г, нетривиальны. Однако это невозможно доказать правильными трехцветными раскрасками, так что теорема 1, хотя и позволяет доказывать неизотопность узлов во многих случаях, не дает универсального способа доказательства.

Упражнение 7. Постройте бесконечную последовательность узлов, у которых числа правильных трехцветных раскрасок диаграмм попарно различны. (По теореме 1 любые два узла этой последовательности неизотопны.)

Теорема 1 останется верной, если в ней вместо слова «узел» написать слово «зацепление».

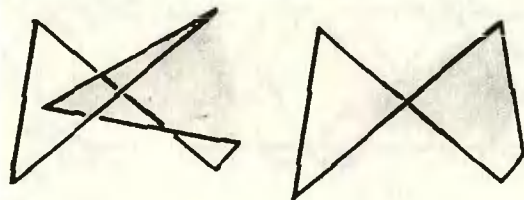


Рис. 12.

З а м е ч а н и е. Если диаграмма зацепления не допускает правильной раскраски, в которой присутствовало бы более одного цвета, то зацепление невозможно расцепить (то есть оно не изотопно никакому зацеплению, состоящему из узлов, которые располагаются по разные стороны от некоторой плоскости).

Упражнение 8. Докажите, что зацепления, изображенные на рисунке 4, не расцепляются.

Как доказать теорему 1

Теорема 1 очевидным образом вытекает из следующих двух теорем, доказательства которых несложны, но довольно громоздки; прилежный читатель, несомненно, найдет их самостоятельно.

Т е о р е м а 2. Всякую элементарную изотопию зацепления можно заменить конечной последовательностью элементарных изотопий, каждая из которых изменяет диаграмму зацепления одним из способов, изображенных на рисунке 11.

Например, элементарную изотопию, изображенную на рисунке 12, можно заменить последовательностью элементарных изотопий, показанных на рисунке 13 (цифрами указан порядок выполнения элементарных изотопий).

Т е о р е м а 3. Между правильными трехцветными раскрасками диаграмм, получающихся друг из друга операциями, изображенными на рисунке 11, существует взаимно однозначное соответствие, при котором в соответствующих раскрасках неизменяющиеся части диаграмм окрашены одинаково.

Для всех операций, кроме операции, изображенной на рисунке 11, з, утверждение теоремы 3 очевидно. В последнем случае доказательство легко сводится к картинкам, показанным на рисунке 14.

Почему же число правильных раскрасок диаграммы — инвариант узла?

Я надеюсь, что читатель доказал теоремы 2 и 3, а вместе с ними и теорему 1. Однако что же ответить на вопрос, вынесенный в заголовок этого параграфа?

Вы убедились в инвариантности числа правильных раскрасок, но, ве-

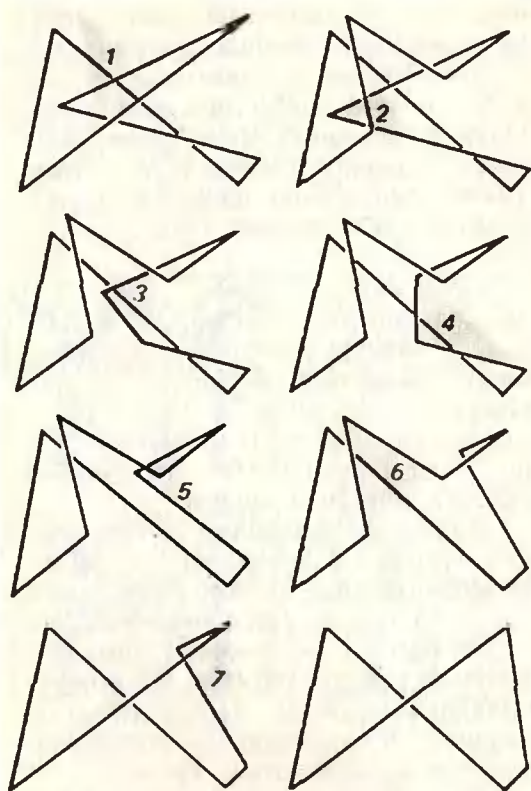


Рис. 13.

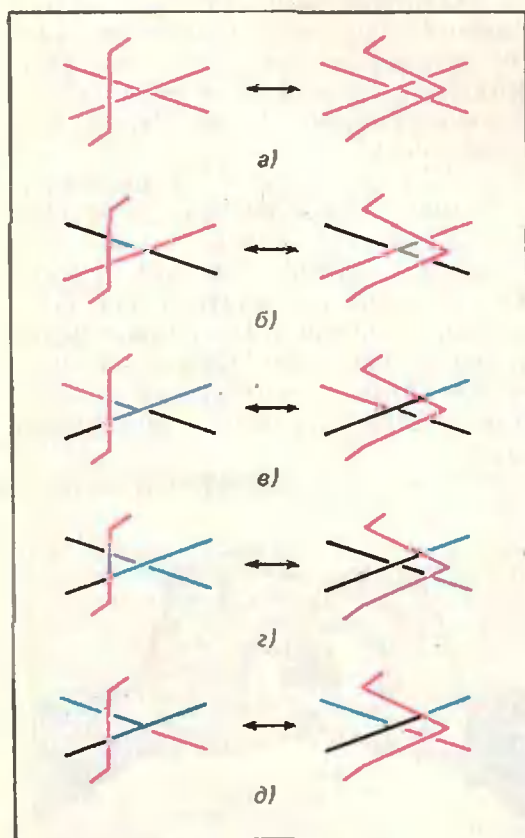


Рис. 14.

роятно, скажете, что хотели бы узнать о настоящих причинах этого удивительного явления. Вы ждете объяснений и хотите понять, как математики додумались раскрашивать диаграммы узлов. Не могло же, кроме того, это доказательство быть первым доказательством! Так можно доказать инвариантность любого инварианта, определяемого по диаграмме узла, совершенно не понимая, откуда он взялся! Ведь непонятно, почему нужно раскрашивать в три цвета и как возникли правила раскраски. Наконец, неясно, как это обобщить, а это — верный признак непонимания.

Почему же я выбрал такой путь доказательства? На то были две причины. Во-первых, настоящие доказательства теоремы 1, проясняющие суть дела, связаны со сложными вспомогательными объектами, которые занимают почетное место в современной математике, но которых нет в школьной математике. Мне же хотелось представить чисто элементарное доказательство существования нетривиальных узлов. В литературе, а тем более в популярной литературе, таких доказательств не было. Во-вторых, опираясь на теорему 2, действительно можно доказать инвариантность любого инварианта, определяемого по диаграмме. Попробуйте придумать совершенно новый инвариант и доказать его инвариантность таким образом. Если получится, сообщите, это может оказаться очень интересным! Известно много инвариантов, определяемых по диаграмме узла, но в определениях большей их части встречаются неэлементарные математические понятия. Поэтому опасность придумать что-нибудь известное не велика.

Чем в действительности объясняется инвариантность числа правильных раскрасок? Важнейшим инвариантом узла является его группа. Сама по себе группа узла — непростой объект. Это множество, в котором определена операция, своими свойствами напоминающая сложение целых чисел. Доказать, что группы двух узлов различны, может быть очень трудно. Один из простейших способов сделать это состоит в изу-

чении отображений групп узлов в более простые множества с операциями. Например, в множество всех перемещений плоскости, переводящих в себя некоторый правильный треугольник. Оказывается, правильные трехцветные раскраски диаграммы узла — это отображения груп-

пы узла в множество этих перемещений, обладающие специальными свойствами, и, поскольку группа узла не изменяется при изотопиях, число правильных трехцветных раскрасок тоже остается неизменным. Таков план «более правильного» доказательства теоремы 1*).

Амеба...

В пиджаке

Эта история произошла в Москве летом 1966 года на Международном конгрессе математиков.

После одного из рабочих дней Конгресса в непринужденной обстановке собрались несколько математиков-топологов. Кроме советских ученых, среди них были выдающийся алгебраический тополог Дж. Ф. Адамс из Великобритании, его соотечественник, не менее известный геометрический тополог Е. К. Зиман и аспирант последнего Колин Рурк. Продолжался извечный спор о взаимоотношениях геометрии и алгебры. Темпераментный геометр Зиман нападал на алгебраиста Адамса, обвиняя его (а в его лице и всех алгебраистов) в отсутствии воображения и в практической беспомощности.

— Со всеми вашими изощренными алгебраическими инвариантами вы не в состоянии решить простейшие практические задачи, — сказал Зиман. — Вот, например, такую:

Зиман соединил большой и указательный пальцы на левой и на правой руках так, что получились

два зацепленных кольца (рис. 1).

— Могу ли я расцепить эти кольца, не разжимая пальцы? — спросил он. — Я имею в виду, разумеется, что мое тело можно свободно деформировать (без разрывов и склеек), как тело амебы.

Адамс не спешил с ответом, и тут вступил в разговор доселе скромно молчавший аспирант Рурк.

— Нельзя, — уверенно заявил он.

— Как! — воскликнул Зиман. — Вы, мой ученик, геометр, не можете правильно решить такую простую задачу?! Я понимаю — эти беспомощные алгебраисты... Но вы!

Однако Рурк упорствовал. Вскоре, как водится среди англичан, было заключено пари. Тут же, на бумажной салфетке, Зиман нарисовал серию превращений амебы (рис. 2) и потребовал немедленной выплаты условленной суммы. Ответ Рурка был лаконичным:

— Да, но... вы — в пиджаке.

Зиман призадумался, а затем стал рассуждать вслух:

— Да, конечно, все эти деформации можно проделать и под пиджаком, но после этого пиджак уже не будет сидеть как прежде на амебе. Он будет связывать ей руки... Даже одного рукава для этого хватит.

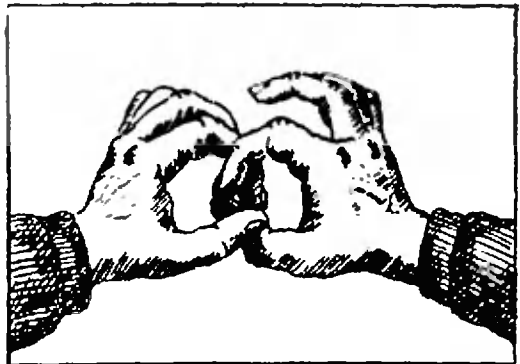


Рис. 1.

* Такое доказательство и сама идея раскрашивать диаграммы узлов принадлежат американскому топологу Р. Фоксу — см. его статью «Metacyclic invariants of knots and links» (Canadian Journal of Mathematics, 1960, № 2, vol. 22, pp. 193—201). Об узлах с несколькими нитями можно прочесть в статье «Узел на столе математика» («Квант», 1975, № 7).

Пока Зима нехотя доставал из кармана бумажник, его окончательно расстроила завершающая эту историю реплика Адамса:

— Кстати, хотел бы я знать, как вы это докажете без инвариантов?

Опираясь на инвариант, описанный в статье О. Виро, дока-

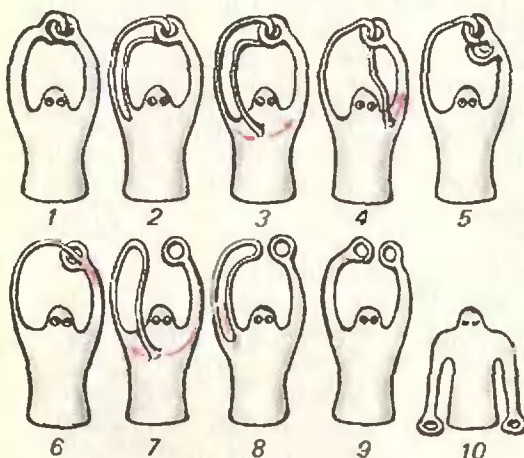


Рис. 2.

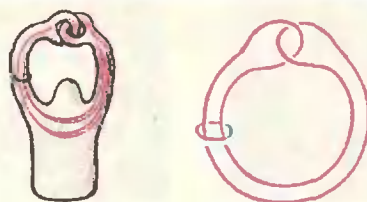


Рис. 3. а) б)

жем, что амeba в пиджаке не может расцепить пальцы.

Проедем мысленно две замкнутые кривые: синюю — по пиджаку вокруг правой руки (рукав) и красную, соединяющую внутри амeбы большие и указательные пальцы правой и левой рук (рис. 3,а). Эти две кривые образуют зацепление (рис. 3,б), изотопное изображенному на рисунке 4,г на с. 9. Если бы амeba смогла разнять руки, то она смогла бы снять пиджак. Но это невозможно, поскольку зацепление рисунка 4,г расцепить нельзя (см. упражнение 8 на с. 12).

О. В.

Задачи наших читателей

1. а) Возьмем число 16. Между единицей и шестеркой вставим число 15 — получим число 1156. В середине этого числа снова вставим 15 — получим 111556 и т. д. Докажите, что все такие числа (вида 11...155...56) являются квадратами целых чисел.

б) То же про числа 4489, 414889, ..., получающиеся из 49 вставкой в середину числа 48.

2. а) Между цифрами числа 961 вставили по n нулей. Докажите, что при любом n получится квадрат целого числа.

б) Найдите другие трехзначные числа, обладающие тем же свойством.

3. а) Докажите, что дробь

$$\frac{19}{95} \cdot \frac{199}{995} \cdot \frac{1999}{9995} \cdots \frac{199\dots9}{99\dots95} \dots$$

можно «сократить», «зачеркнув» все девятки.

б) Есть ли еще дроби, допускающие подобное обращение?

И. Суев

4. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n . Докажите, что последовательность $S(1979)$, $S(1979^2)$, $S(1979^3)$, ... не ограничена.

А. Келарев



Н. Ростовцев

Сделать опыт Юнга?

Это не так сложно

На достаточно большом расстоянии от экрана для наблюдений расположите рядом две одинаковые лампочки, например лампочки для карманного фонаря. Зажгите вначале одну из них, а затем обе одновременно. Вы увидите, что в любом месте экрана освещенность больше при двух горящих лампочках, чем при одной.

Однако это не всегда так. При наложении двух световых пучков может оказаться, что в одних местах пространства они усиливают друг друга, в других — ослабляют или даже гасят друг друга. Это явление называют *интерференцией света*, а световые пучки, которые дают такую картину, называют *когерентными*.

Впервые экспериментальное изучение интерференции света было проведено английским ученым Томасом Юнгом в самом начале

XIX века. Схема опыта, носящего его имя, приведена на рисунке 1, а. Свет от ярко освещенного Солнцем малого отверстия (или узкой щели) *A* попадал на два близко расположенных друг к другу малых отверстия (или узкие щели) *B* и *C* ($|BC| \approx 2$ мм). На удаленном экране ($l \approx 2$ м) в месте перекрытия световых пучков, выходящих из *B* и *C*, наблюдались чередующиеся друг с другом светлые и темные полосы (рис. 1, б). Если одну из щелей *B* или *C* загоразживали, темные полосы исчезали и на экране оставалось лишь светлое пятно.

Как можно объяснить результаты опыта Юнга? Согласно принципу Гюйгенса — Френеля, малые отверстия *B* и *C*, до которых дошла волна от отверстия *A*, становятся точечными источниками вторичных волн. Из-за общности происхождения эти волны когерентны и при наложении они интерferируют. В тех местах, куда волны приходят в одинаковых фазах, они усиливают друг друга и образуют максимумы освещенности. Там же, куда волны приходят в противоположных фазах, они ослабляют друг друга и образуют минимумы освещенности. Так как колебания в отверстиях *B* и *C* совпадают по фазе, ясно, что результат интерференции целиком зависит от разности хода Δ интерferирующих волн до рассматриваемой точки.

В точку *O*, равноудаленную от отверстий, волны приходят в одинаковых фазах и усиливают друг друга — там наблюдается центральный максимум освещенности. При удалении от точки *O* вверх или вниз разность хода волн $\Delta = |BD - CD|$ постепенно увеличивается и последовательно принимает значения $\lambda/2, \lambda, 3/2\lambda, 2\lambda, \dots$, где λ — длина волны. Максимумы освещенности наблюдаются в тех местах, для которых выполняется условие

$$\Delta = 0, \lambda, 2\lambda, \dots$$

В точках, для которых

$$\Delta = \lambda/2, 3/2\lambda, 5/2\lambda, \dots$$

наблюдаются минимумы освещенности.

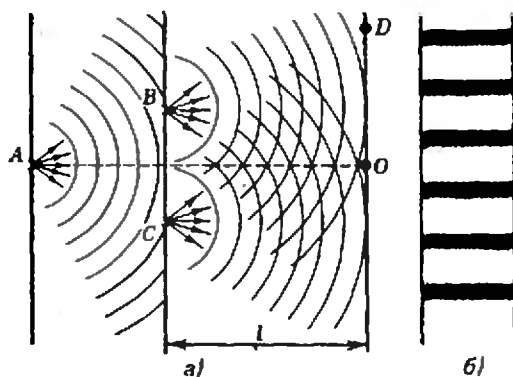


Рис. 1.

Можно ли самому воспроизвести опыт Юнга? Оказывается, сделать это, правда, в несколько другом варианте, довольно просто.

Приготовьте одну или две одинаковые ручные швейные иглы диаметром 0,6—0,8 мм и лист бумаги. Лучше воспользоваться черной бумагой, применяемой для упаковки фотопленки или фотобумаги. Роль точечного источника света может играть лампочка для карманного фонаря (если наблюдения проводить на расстоянии, не меньшем 2—3 м от нее) или малое отверстие (диаметром 2—3 мм) в куске картона, установленного непосредственно перед лампочкой так, чтобы через отверстие была видна нить накаливания. В вечернее время можно воспользоваться светом от удаленного фонаря. Самым же лучшим источником света является изображение Солнца в стальном шарике (диаметром 10—20 мм).

Если у вас все готово, приступайте к опытам.

1. Вырежьте из бумаги полоску шириной 1—2 см и иглой проколите в ней отверстия все уменьшающихся диаметров, начиная с диаметра иглы 0,6—0,8 мм. Чтобы отверстия получились круглыми, полоску бумаги при прокалывании поворачивайте вокруг иглы или иглу вращайте вокруг ее оси.

Посмотрите на точечный источник последовательно через каждое отверстие, помещая его непосредственно перед глазом. Вы увидите, что через самое большое отверстие источник будет выглядеть практически так же, как и без отверстия. При меньшем диаметре отверстия картина будет другой: светлое круглое пятно будет окружено темными и светлыми кольцами (рис. 2). По мере уменьшения диаметра отверстия диаметр центрального светлого пятна и окружающих его колец будет увеличиваться, а их интенсивность — уменьшаться.

2. Теперь изготовьте так называемое двойное отверстие, чтобы провести непосредственно опыт Юнга. В правую и левую руки возьмите одинаковые иглы. На по-



Рис. 2.



Рис. 3.

лоске бумаги шириной 1—2 см установите острие одной иглы, а на расстоянии долей миллиметра от него установите острие другой иглы. Иглы должны составлять небольшой угол с вертикалью. Постарайтесь одновременно и одинаково сильно нажать на обе иглы — вы получите двойное отверстие. (Конечно, двойное отверстие можно сделать и одной иглой, но, как показывает практика, качество его будет хуже.) Хорошо, если диаметры отверстий будут порядка 0,2—0,3 мм, а расстояние между ними — порядка 0,4—0,6 мм.

Посмотрите через эти отверстия на точечный источник света. Вы увидите, что центральное светлое пятно, получаемое при предыдущем наблюдении, будет разбито темными полосами на ряд светлых полос (рис. 3). Темные полосы (минимумы освещенности) и есть те места, где свет от одного отверстия гасится светом от другого отверстия. Если отверстия круглые и одинакового диаметра, линии минимумов хорошо видны не только на центральном светлом пятне, но и на окружающих его светлых кольцах.

В центре интерференционной картины всегда видна светлая полоса. Число всех светлых полос, укладываемых на центральном пятне, может быть равным 3, 5, 7, ... Это зависит от отношения расстояния между центрами отверстий к их диаметру. Если диаметр отверстий оставить неизменным, а расстояние между отверстиями уменьшать, число светлых полос тоже уменьшается, а их ширина соответственно увеличивается.

Поверните полоску бумаги с двойным отверстием вокруг прямой, соединяющей источник света и глаз, — повернется и система светлых и темных полос.



В. Евстигнеев

Графы и программы

Теория графов оформилась как самостоятельная ветвь математики в середине тридцатых годов и продолжает интенсивно развиваться по сей день. Большой интерес к теории графов сегодня основан в первую очередь на ее широких и плодотворных применениях к проектированию и анализу сложных систем самой различной природы: транспортных сетей, электрических цепей, электронных схем, механических систем, химических реакций, управляющих систем, социальных групп и коллективов и т. д. На этом занятии математического кружка мы разберем несколько задач программирования, в которых применяются графы.

Графы и ориентированные графы

Граф — это набор элементов, некоторые пары которых выделены. Граф G , таким образом, определяется двумя множествами:

$$G = (X, U);$$

первое состоит из элементов произвольной природы (они называются *вершинами*), а второе — из всех

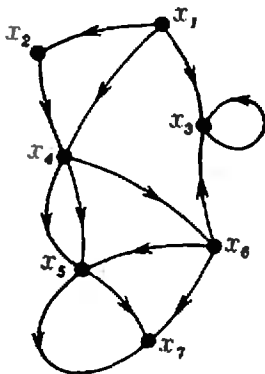


Рис. 1.

выделенных пар вершин. Если каждая выделенная пара упорядочена, граф G называется *ориентированным графом* или *орграфом*, пары называют *дугами*; говорят, что дуга (x, y) направлена от своего начала x к своему концу y и пишут

$$U \ni u = (x, y).$$

В этом случае говорят еще, что дуга *исходит* (*выходит*) из x и *заходит* (*входит*) в y . Изображают орграф на плоскости в виде точек, соединенных дугами со стрелками (рис. 1). Заметьте на этом рисунке, что дуга, выходящая из вершины x_3 , заходит в нее же; такая дуга называется *петлей*.

Если пары (x, y) не упорядочены, то их называют *ребрами*, вершины ребра $u = \{x, y\}$ называются *концами*, а сам граф $G = (X, U)$ называется *неориентированным графом* или просто *графом*. Пример такого графа — так называемый *граф Петерсона* — показан на рисунке 2.

Граф данной программы

Пусть дана некоторая программа P , например, в виде *блок-схемы* («Алгебра 8», п. 50). Сопоставим каждому блоку вершину графа и соединим вершины в соответствии с последовательностью действий (указанной стрелками) в блок-схеме. Полученный орграф назовем *орграфом программы P* или *p -графом*.

Упражнение 1. Нарисуйте p -граф, отвечающий блок-схеме программы сортировки шаров, показанной на рисунке 3.

Если программа P записана на каком-либо алгоритмическом языке,

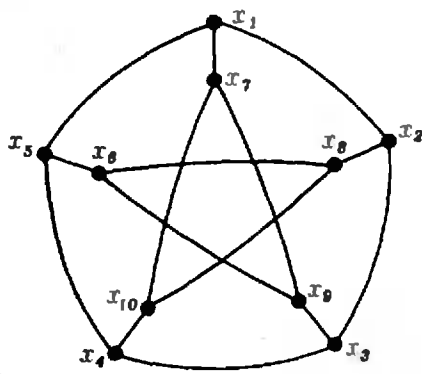


Рис. 2.

то ей тоже можно сопоставить некоторый p -граф: каждому оператору отвечает вершина, две вершины a и b соединяются дугой (a, b) , если управление передается от оператора, изображенного вершиной a , к оператору, изображенному вершиной b .

Еще один пример p -графа показан на рисунке 4. Обратите внимание на две особые вершины: *вход* s (соответствующий входным данным программы), в который не заходит ни одна дуга, и *выход* t (соответствующий выходным данным программы), из которого не исходит ни одна дуга.

На данном p -графе $G = (X, U)$ (и вообще на любом орграфе) часто рассматривают *путь*, соединяющий данные вершины $a, b \in X$, то есть последовательность вершин

$\mu[a, b] = (a = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$, поочередно соединенных дугами

$(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in U$.
 Путь $\mu[a, b]$ называется *простым* путем, если в нем вершины не повторяются, *контуром*, если $a = b$, и *простым контуром*, если $a = b$, но других повторений вершин нет. Так, на рисунке 4 путь (x_1, x_3, x_6, t) — простой, $(x_1, x_4, x_6, x_3, x_6, t)$ — не простой путь, (x_3, x_6, x_3) — простой контур, $(x_3, x_6, x_3, x_6, x_3)$ — контур, но не простой, а (x_2, x_7, x_6) — даже не путь.

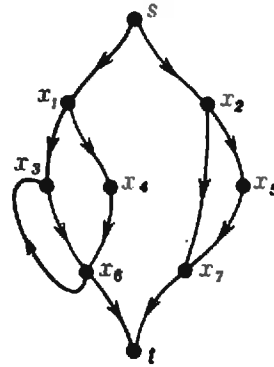


Рис. 4.

Упражнение 2. Перечислите все простые пути и все простые контуры p -графа, построенного при решении упражнения 1.

Все ли пути ведут в Рим?

В p -графе, отвечающем хорошо составленной программе, «все пути ведут в Рим», то есть любой путь с началом в s можно продолжить до выхода t , обозначающего конец работы программы. Поэтому p -граф естественно назвать *правильным*, если любая вершина лежит на пути (не обязательно простом), ведущем из s в t .

Конечно, правильность p -графа еще не гарантирует успешную работу программы: если в нем есть хотя бы один контур, из которого не выходит ни одна дуга, программа может *заикнуться*, то есть крутиться по этому контуру. Но так как не существует общего алгоритма, проверяющего правильность работы программ (об этом мы расскажем в «Кванте» в другой раз), важно уметь проверять хотя бы правильность p -графа.

Как проверить правильность p -графа? В простых случаях это легко делается «вручную».

Упражнение 3. Проверьте правильность p -графа программы сортировки шаров (см. упражнение 1). Удостоверьтесь в некорректности p -графа на рисунке 5, найдя на нем «тупики», «тупиковые контуры» и «недостижимые контуры».

В сложных же случаях, например, в современных больших программах, ручная проверка слишком трудоемка и ненадежна — приходится прибегать к помощи ЭВМ. Поэтому необходимо иметь подходящие для этой цели алгоритмы. Задачу о построении таких алгоритмов мы сформулируем в виде трех упражнений (4—6) и для первого из них подскажем решение.

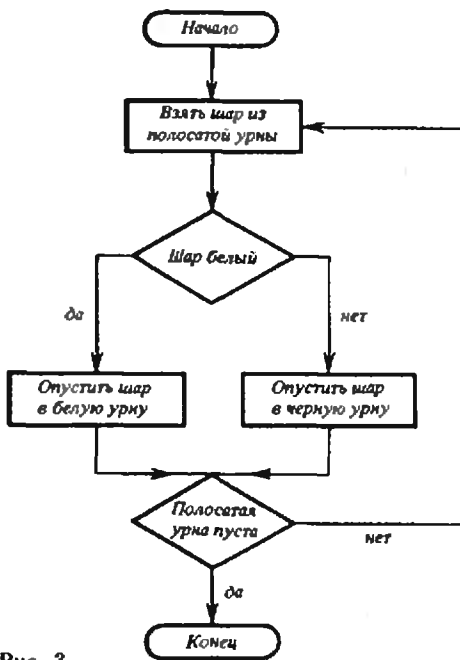


Рис. 3.

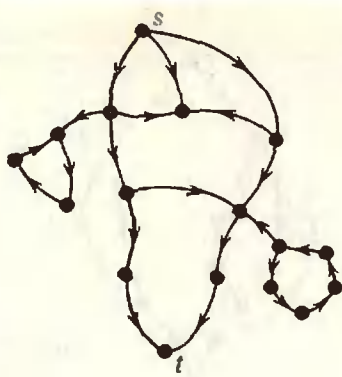


Рис. 5.

Упражнение 4. Найти все простые пути, соединяющие вход p -графа с его выходом.

Один из наиболее красивых алгоритмов для решения этой задачи основан на последовательном удалении вершин p -графа. На рисунке 6 показано его применение к p -графу из рисунка 4. На каждом шагу удаляется одна из вершин $x \in X$ (отличная от s и t); вместо простых путей, соединяющих вершины, соседние с x и проходящие через x , строится новая дуга (рядом с которой записывается название удаленной вершины). Возникающие в этом процессе петли отбрасываются. В результате получается набор дуг, соединяющих s с t , причем на каждой из этих дуг последовательно выписаны вер-

шины, через которые проходит один из искомым путей.

В заключение этого раздела предлагается найти алгоритмы, решающие упражнения 5, 6. Записать их можно в виде блок-схемы, в табличном виде («Алгебра 8», п. 49) или, для учащихся ЗШП, на языке Рапира.

Упражнение 5*. Найти все простые контуры p -графа.

Упражнение 6*. Построить систему путей (не обязательно простых), соединяющих вход p -графа с его выходом, покрывающую все вершины p -графа. Построить минимальную (по числу путей) такую систему.

Орграф арифметического выражения

При вычислении арифметических выражений на ЭВМ в произвольном порядке, когда этих выражений много и они достаточно громоздки, исходные данные и промежуточные результаты вычислений могут занять недопустимо большой объем памяти ЭВМ; как говорят программисты, «программа забывает оперативную память машины». Как с этим бороться? Здесь на помощь приходит теория графов.

Оказывается, с каждым арифметическим выражением можно свя-

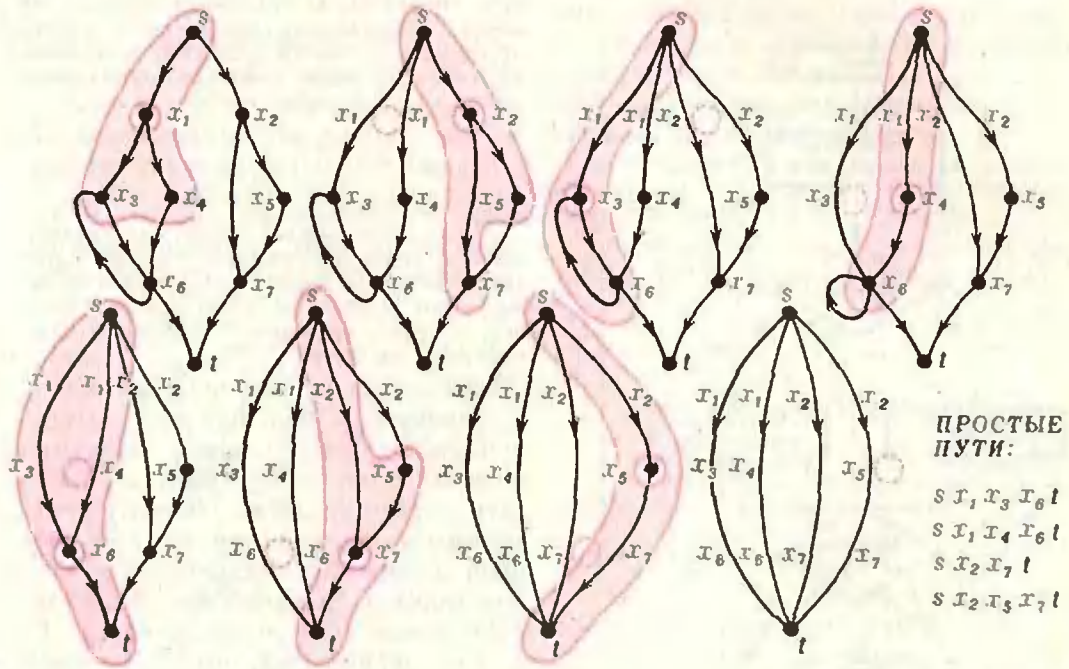


Рис. 6.

зять оргграф специального вида. Например, с выражением

$$((a+b) \cdot (c-d)) / (g+f) + h = L$$

можно связать граф, показанный на рисунке 7. Если в формуле буквы не повторяются, подобные графы имеют специальное название. *Ордеревом* (ориентированным деревом) называется оргграф, в котором выделена одна вершина — *корень* ордерова и от любой другой вершины ордерова к корню идет единственный путь. Из корня ни в одну вершину пути нет.

Так, в нашем примере (см. рис. 7) показано ордеревое с корнем L . Вершины a, b, c, d, f, g, h называются *висячими*.

Упражнение 7. Постройте ордеревое выражения

$$\frac{\sqrt{x+y}}{z^2+5at+7k} + \frac{b+c}{r} = L.$$

Возвращаясь к рисунку 7, представим себе, что отдельные операции производятся в моменты времени, показанные красными вертикальными линиями. Тогда в памяти приходится держать до 6 чисел одновременно. Правда, это число можно снизить до 4, если ввести в память числа g, f в момент времени $t=2$ (вместо $t=1$).

Нельзя ли изобразить наше выражение еще более экономным (в этом смысле) ордеревом?

Протащим верблюда через игольное ушко

Рассмотрим дискретную шкалу времени $t=1, 2, 3, \dots$. Пусть вычислительный процесс организован так, что ячейки памяти заполняются (вводятся исходные данные, записывается вычисленный промежуточный результат и т. д.) в целочисленные моменты времени и остаются занятыми в течение нескольких интервалов времени выбранной шкалы. Когда содержимое ячейки используется, она освобождается. Предположим также, что в каждый момент времени производится загрузка только в одну ячейку памяти. Последнее условие позволяет занумеровать вершины соответствующего ордерова,

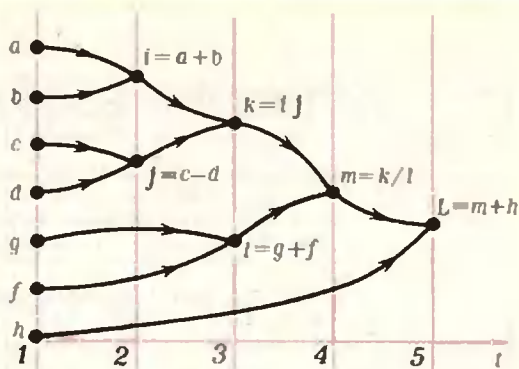


Рис. 7.

используя для этого номера, равные времени появления данной вершины.

Укладкой ордерова $T = (V, E)$ назовем такую нумерацию его вершин, то есть отображение $Y: V \rightarrow \{1, \dots, n\}$, при которой номер начала дуги $u = (x, y) \in E$ меньше номера ее конца, то есть $Y(x) < Y(y)$.

Будем говорить, что дуга (x, y) *проходит над* вершиной z , если $Y(x) < Y(z) < Y(y)$. Обозначим через $W(x)$ число дуг, проходящих над вершиной x , и назовем *шириной* $W(Y, T)$ укладки Y ордерова T наибольшее из чисел $W(x) + 1$, то есть

$$W(Y, T) = \max_{x \in V} (W(x) + 1)$$

Упражнение 8. Найдите вершину ордерова, показанного на рисунке 7. При решении упражнения 7 попробуйте построить по возможности «узкое» ордеревое.

Как связаны между собой требуемый объем памяти и ширина укладки? Очевидно, если в дереве имеется дуга $u = (x, y)$, данное в вершине x требуется для вычисления данного в вершине y и хранится столько времени, над сколькими вершинами $(+1)$ проходит дуга u . Следовательно, число $W(x) + 1$ равно числу ячеек памяти, занятых в момент появления данного в вершине x и, значит, *ширина укладки ордерова T равна числу ячеек памяти, требуемых при данной организации процесса.*

Идея построения упадок ордерова, ширина которых мала, была высказана А. П. Ершовым в 1958 году и оказалась чрезвычайно полезной. Для сложных задач удаются такие узкие укладки, что в пору говорить о протаскивании верблюда через игольное ушко!

a	0	a
b	0	b
c	0	c
d	0	d
i	1	abi
j	1	cdj
f	0	f
g	0	g
k	2	abiedjk
l	1	fgl
m	2	abiedjkfglm
h	0	h
L	2	abiedjkfglmhl

Рис. 8.

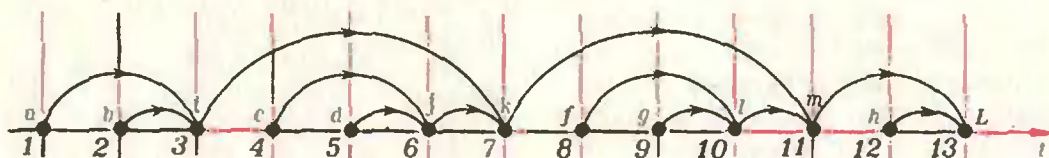


Рис. 9.

Один из алгоритмов построения таких укладок, известный под названием *алгоритма Реджеевского*, мы сейчас опишем.

Шаг 1. Построим таблицу с n строками и тремя столбцами, где n — число вершин ордерова.

Шаг 2. Заполним первый столбец таблицы снизу вверх, поместив в самой нижней строке корень x_0 ордерова, затем в произвольном порядке его предшественников, лишь бы нигде не нарушалась очередность вычислений (то есть любые данные, нужные для очередной операции, должны быть получены раньше ее выполнения).

Далее через $p(x)$ и $q(x)$ мы будем обозначать записи во втором и третьем столбцах строки, начинающейся с буквы x . Значениями функции p будут числа, функции q — последовательности букв. Пусть уже заполнены r первых строк.

Шаг 3. Приступаем к заполнению очередной строки (предыдущие уже заполнены): обозначим через x ее первую букву. Если вершина x —

висячая, переходим к шагу 4, в противном случае — к шагу 5.

Шаг 4. Во втором столбце пишем 0, в третьем — x . (Таким образом, мы положили $p(x) = 0, q(x) = x$.) Переходим к шагу 3.

Шаг 5. Пусть y_1, y_2, \dots, y_k — вершины ордерова, непосредственно предшествующие x , упорядоченные так, что $p(y_1) \geq p(y_2) \geq \dots \geq p(y_k)$. Найдем

$$p(x) = \max_{1 \leq s \leq k} \{p(y_s) + s - 1\}$$

$$q(x) = q(y_1)q(y_2)\dots q(y_k)x,$$

и внесем найденные значения во второй и третий столбцы рассматриваемой строки. Переходим к шагу 3.

Повторяем шаги 3—5, пока не будет заполнена вся таблица. Тогда в последней строке во втором столбце мы получим ширину укладки, то есть $p(x_0) = W(Y, T)$, а в третьем — саму укладку дерева T , если вершины в последовательности $q(x_0)$ занумеровать слева направо.

Таблица, полученная при применении алгоритма Реджеевского к ордеру на рисунке 7, показана на рисунке 8, а «уложенное» ордерено — на рисунке 9.

Упражнение 9. Примените алгоритм Реджеевского к ордеру, полученному в упражнении 7.

Победители конкурса «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». В соответствии с решением оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников победители этого конкурса получают право участвовать в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады.

Ниже публикуется список победителей конкурса «Кванта» 1980 года, получивших право участвовать в республиканских олимпиадах 1981 года.

М а т е м а т и к а

- Э. АБДУЛЛАЕВ — Масаллы, с. ш. № 2, 10 кл.
 А. БАРГ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
 Ю. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ — Минск, с. ш. № 64, 10 кл.
 В. БЕРЕЖНОЙ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
 А. БРУДНЫЙ — Ярославль, с. ш. № 33, 10 кл.
 М. ГАЙСИНСКИЙ — Ташкент, с. ш. № 103, 10 кл.
 Д. ГРИГОРЬЕВ — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
 О. ЕРОШКИН — Днепронетровск, с. ш. № 15, 8 кл.
 А. ЗЕГЕ — Минск, с. ш. № 50, 10 кл.
 А. ЗОЛОТЫХ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
 З. ИБРАГИМОВ — Масаллы, с. ш. № 2, 10 кл.
 А. КАГАРМАНОВ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
 С. КИМ — Бектемир, с. ш. № 2, 10 кл.
 И. КОЛПАКОВ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
 Д. КОРОТКИН — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 9 кл.
 С. ЛАМИХОВ — Ташкент, с. ш. № 103, 10 кл.
 Л. МЕРКЯВИЧЮС — Лентварис, с. ш. № 2, 11 кл.
 Ю. НАЗАРЕНКО — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
 П. ОБЧИННИКОВ — Вязники, с. ш. № 11, 10 кл.
 М. ОКРОЯН — Ереван, ФМШ при ЕРГУ, 10 кл.
 В. РОМАНЮК — с. Кушнище Волынской обл., 10 кл.
 Б. РУБЛЕВ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
 А. СЕРИВАН — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 9 кл.
 С. СПИЧАК — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
 Э. СТЕПАНИАН — Баку, с. ш. № 5, 10 кл.
 В. ТИТЕНКО — д. Блужа Минской обл., 9 кл.
 Р. УГРИНОВСКИЙ — Хмельник, с. ш. № 3, 9 кл.
 О. ФОНАРЕВ — Сумгаит, с. ш. № 11, 10 кл.
 А. ХАРИТОНСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
 О. ЧАЛТЫХ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 9 кл.
 Л. ЭЛЬКУН — Ташкент, с. ш. № 189, 10 кл.

Ф и з и к а

- В. АВЕТИСОВ — Баку, с. ш. № 145, 10 кл.
 В. БЕРЕЖНОЙ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
 В. ВАСИЛЬЕВ — Великие Луки, с. ш. № 3, 10 кл.
 Б. ВЕЙЦМАН — Одесса, с. ш. № 53, 9 кл.
 Н. ГУВИН — Ереван, ФМШ при ЕРГУ, 10 кл.
 И. ЕЛИШЕВИЧ — Чернигов, с. ш. № 3, 10 кл.
 М. ЗЕЙФМАН — Вологда, с. ш. № 9, 10 кл.
 И. КОМПАНИЕЙЦЕВ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
 А. ЛЯПИН — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
 О. МАНУЙЛЕНКО — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
 А. ОСИПОВ — Сосновый Бор, с. ш. № 5, 10 кл.
 В. ПЕНТЕГОВ — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
 А. ПОНОМАРЕНКО — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
 А. САНЖУР — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
 А. СМЕРНОВ — Курган, с. ш. № 28, 10 кл.
 Ю. ТАЛДЕНКО — Сумы, с. ш. № 10, 9 кл.
 В. ФЕДЮКОВИЧ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
 А. ЦЕХАНСКИЙ — п. Запрудня Московской обл., с. ш. № 1, 10 кл.
 И. ШКРАДЮК — Ногинск, с. ш. № 83, 10 кл.

Задачник «Кванта»

Задачи

М671—М675; Ф683—Ф687

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 мая 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например М671, М672 или Ф683. Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М671. Во вписанном четырехугольнике одна диагональ делит вторую пополам. Докажите, что квадрат длины первой диагонали равен половине суммы квадратов длин всех сторон четырехугольника.

Р. Мазов

М672*. Пусть a — натуральное число такое, что $2^a - 2$ делится на a (например, $a = 3$). Определим последовательность (x_n) условиями

$$x_1 = a, \quad x_{k+1} = 2^{x_k} - 1.$$

Докажите, что $2^{x_k} - 2$ делится на x_k при любом k .

Вальтер Яноус (Инсбрук, Австрия)

М673. На плоскости в вершинах треугольника лежат три шайбы A, B, C . Хоккеист выбирает одну из них и бьет по ней так, что она проходит между двумя другими и останавливается в какой-то точке.

а) Покажите, как после пяти ударов шайба C может вернуться на свое место, а шайбы A и B поменяться местами.

б) Могут ли все три шайбы A, B, C вернуться на свои прежние места после 25 ударов?

А. Разборов

М674. На сторонах BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что центр описанной около треугольника ABC окружности совпадает с точкой пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Д. Изаак

М675. Системой разновесов называется совокупность натуральных чисел, из которой нельзя извлечь два различных набора с одинаковой суммой (например, числа 24, 23, 22, 20, 17, 11 образуют систему разновесов, а числа 1, 2, 3, 4, 5, 8 — не образуют: $2 + 3 + 4 = 1 + 8$). Докажите, что из чисел, меньших 1000, можно выделить систему разновесов из: а) 10 чисел, б) 11 чисел.

- в) Докажите, что 14 чисел из них выбрать нельзя.
 г) Докажите, что если числа образуют систему равновесов, то сумма их обратных величин не превосходит $5/2$.
 д) Выберите из чисел, меньших 700, систему равновесов из 11 чисел.

Г. Гуревич, А. Колотов

Ф683. На рисунке 1 показаны источник AB и его изображение $A'B'$, полученное в линзе. Определить построением расположение линзы и ее фокусное расстояние.

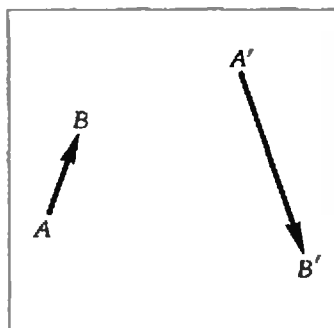


Рис. 1.

Ф684. Схема имеет N входных зажимов, один выходной и один общий («земля»). На каждом из входных зажимов потенциал относительно «земли» составляет от $+50$ до $+200$ В.

- 1) Нарисуйте вариант схемы, который обеспечит на выходном зажиме максимальный из приложенных ко входам потенциалов.
 - 2) Нарисуйте другой вариант — обеспечивающий на выходном зажиме минимальный из приложенных потенциалов.
- Постарайтесь обойтись без применения дополнительных источников питания.

А. Зильберман

Ф685. Между стенкой и кубом массы $M=10$ кг летает на гладком столе упругий шарик массы $m=0,1$ г. Его скорость вначале, когда куб покоился, составляла $v_0=100$ м/с. Найти скорость куба в тот момент, когда он будет в 2 раза дальше от стенки, чем вначале.

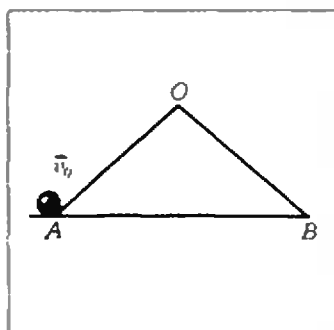


Рис. 2.

Ф686. Тонкий обруч массы M и радиуса R поставлен на горизонтальную плоскость. По гладкому каналу, проходящему внутри обруча, соскальзывает из верхней точки без начальной скорости небольшое тело массы m . Определить скорость центра обруча в тот момент, когда тело находится в точке обруча A , радиус-вектор которой образует угол φ с вертикалью. В начальный момент обруч покоится. Трение между обручем и плоскостью отсутствует.

С. Кротов

Ф687. Стальному шарикю, находящемуся в точке A основания AB равнобедренного прямоугольного клина, сообщают скорость v_0 в направлении стороны AO (рис. 2). При каких значениях v_0 шарик из точки A попадает в точку B ? Длина ребра клина l .

*Е. Рабкин,
ученик 9 кл.*

Решения задач

М622—М624, М626, М627; Ф631—Ф637

М622. Докажите, что количество решений уравнения $x^3 + y^3 = z^3 + t^3 + 1$

в натуральных числах, не превосходящих 10^6 , меньше, чем количество решений уравнения

$$x^3 + y^3 = z^3 + t^3$$

в натуральных числах, не превосходящих 10^6 .

Для заданного натурального числа k обозначим через l_k количество решений уравнения $a^3 + b^3 = k$ в натуральных числах, не превосходящих 10^6 . Тогда количество рассматриваемых решений уравнения $x^3 + y^3 = z^3 + t^3 + 1$ равно

$$l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + \dots + l_r^2 = \sum_{k=2}^r l_k^2,$$

где r — наибольшее из k , для которых $l_k \neq 0$ (ясно, что начиная с некоторого достаточно большого k наши уравнения не будут иметь решений в натуральных числах, не превосходящих 10^6). Количество же рассматриваемых решений уравнения $x^3 + y^3 = z^3 + t^3 + 1$ равно

$$l_2 l_3 + l_3 l_4 + \dots + l_{r-1} l_r = \sum_{k=3}^r l_{k-1} l_k.$$

Из неравенства

$$l_k^2 + (l_2 - l_3)^2 + (l_3 - l_4)^2 + \dots + (l_{r-1} - l_r)^2 + l_r^2 > 0,$$

получаем

$$\sum_{k=2}^r l_k^2 > \sum_{k=3}^r l_{k-1} l_k.$$

откуда и следует утверждение задачи.

В связи с задачей М622 возникает следующий, по-видимому, очень трудный, вопрос:

Для каких натуральных k существуют такие натуральные числа n и m , что $n^3 + m^3 = k$?

В. Вавилов

М623. а) Сколько осей симметрии имеет куб? Правильная треугольная пирамида? б) Докажите, что если некоторый многогранник имеет k осей симметрии ($k > 1$), то k нечетно.

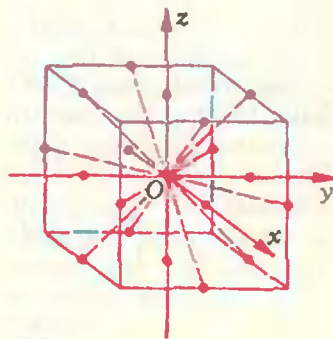


Рис. 1.

а) Нетрудно указать девять осей симметрии куба. Это — прямые, соединяющие центр куба O с центрами граней (их три: Ox , Oy , Oz на рисунке 1) и с серединами ребер (их шесть).

Других осей симметрии у куба нет; это можно доказать, опираясь на такое наблюдение: при любом самосовмещении куба каждая из трех осей Ox , Oy и Oz должна отображаться на одну из этих же осей, причем если это самосовмещение — симметрия (поворот на 180°) S_l относительно некоторой прямой l , отличной от Ox , Oy и Oz , то одна из этих трех осей должна переходить в себя, а две остальные — друг в друга.

У правильного тетраэдра три оси симметрии — прямые, соединяющие середины его ребер. Чтобы убедиться в этом, удобно достроить тетраэдр до куба, проведя через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру (рис. 2). Ясно, что любое самосовмещение тетраэдра будет также самосовмещением этого описанного куба. Из девяти осевых симметрий, отображающих куб на себя, лишь три будут переводить в себя тетраэдр.

б) Пусть дан многогранник M , у которого более одной оси симметрии.

Лемма 1. Если l и m — оси симметрии многогранника M , то $S_l(m) = m'$ — также ось симметрии M .

В самом деле, если точки P и P' многогранника M сим-

Задача М625 решена в статье Ю. Михеева «Одной линией» («Квант», 1980, № 10).

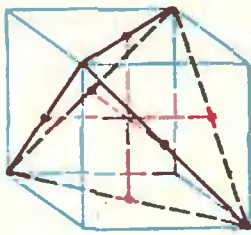


Рис. 2.

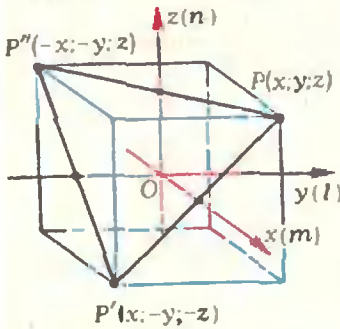


Рис. 3.

метричны относительно m , то $S_l(P)$ и $S_l(P')$ будут симметричны относительно m' . Коротче: $S_{m'} = S_l \circ S_m \circ S_l$.
 Л е м м а 2. Если l и m — оси симметрии многогранника M , пересекающиеся в точке O и перпендикулярные друг к другу, то прямая n , перпендикулярная им обоим и проходящая через точку O , также служит осью симметрии M .

Действительно. $S_n = S_m \circ S_l$. Это легко проверить, приняв данные прямые за оси координат, или построив прямоугольный параллелепипед с центром в точке O и осями симметрии l, m, n с произвольной вершиной P (рис. 3).

Леммы 1 и 2 позволяют, фиксируя какую-то одну ось симметрии l , разбить все остальные на пары: если m удовлетворяет условиям леммы 2, то пару с ней образует n , а если нет, то $m' = S_l(m) \neq m$. Отсюда сразу следует утверждение задачи б).

Возникает естественный вопрос: какие вообще (конечное) множество прямых может быть множеством всех осей симметрии некоторого многогранника?

Различные примеры даются множеством осей симметрии n -угольной правильной призмы (здесь количество осей $p = n$ при n нечетном и $p = n + 1$ при n четном), тетраэдра (или прямоугольного параллелепипеда с разными ребрами, $p = 3$), куба (или октаэдра, $p = 9$) и додекаэдра (или икосаэдра, $p = 15$). Попробуйте доказать, что других множеств осей симметрии (состоящих более чем из одной прямой) не бывает. Конечно, тут не обойтись без такой очень полезной леммы, которую многие читатели применяли и в решении задачи б).

Л е м м а 3. Оси симметрии любого многогранника пересекаются в одной точке.

Предположим, что l, m — непересекающиеся оси симметрии многогранника M . Пусть n — общий перпендикуляр l, m ; рассмотрим прямоугольную систему координат с началом в точке $O = l \cap n$, с осью Oz , направленной по лучу OA , где $A = n \cap m$; пусть $|OA| = a$. Тогда при симметрии относительно оси l координата z любой точки переходит в $(-z)$, а при симметрии относительно m — в $(2a - z)$. Поэтому при композиции этих двух симметрий z изменяется на $2a$. Повторяя эту композицию достаточное число раз, мы «выгоним» любую точку за пределы многогранника M . Противоречие!

Вот еще более короткое доказательство леммы 3 (правда, использующее понятие, заимствованное из механики): пусть O — центр масс одинаковых грузиков, помещенных в вершинах многогранника M ; ясно, что при любом самосовмещении многогранника M грузики лишь меняются местами, поэтому точка O переходит в себя; в частности, все оси симметрии многогранника M проходят через точку O .

Н. Васильев, В. Сендерон, А. Сосинский

М624. Найдите последовательность (a_n) , определяемую условиями $a_1 = 1$,

$$1 + \sum_d (-1)^{n/d} a_d = 0, \quad (*)$$

где сумма \sum берется по всем делителям d числа n (включая $d = 1$ и $d = n$).

Например, если $n = p$ — простое число, то $(*)$ принимает вид $1 + (-1)^{p/1} a_1 + (-1)^{p/p} a_p = 0$, откуда $a_p = 2$, если $p = 2$, и $a_p = 0$, если $p > 2$.

Перепишем соотношение $(*)$ в виде формулы

$$a_n = 1 + \sum_{1 < d < n} (-1)^{n/d} a_d, \quad (**)$$

которую можно рассматривать как рекуррентную для вычисления $a_n (n = 2, 3, 4, \dots)$.

Найдя несколько первых членов последовательности (a_n) :

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = 4, a_5 = a_6 = a_7 = 0, a_8 = 8, \dots,$$

можно предположить, что верно следующее общее утверждение:

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{если } n = 2^m, \\ 0, & \text{если } n \neq 2^m. \end{cases} \quad (1)$$

Докажем это, используя метод математической индукции. Пусть утверждение (1) верно для всех $n < k$. Докажем его для $n = k + 1$. Рассмотрим два случая.

а) $n = k + 1 = 2^m, m \geq 1$.

Согласно предположению индукции, (1) верно для всех делителей числа $n = k + 1$, не превосходящих k . В данном случае — для чисел $1, 2, 2^2, \dots, 2^{m-1}$.

Применяя соотношение (*), определяющее последовательность (a_n) , получаем

$$1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2^m-1} - a_{2^m} = 0,$$

откуда

$$a_{k+1} - a_{2^m} = 1 + 1 + 2 + \dots + 2^{m-1} = 2^m,$$

— утверждение в случае а) доказано.

б) $n - k + 1 \neq 2^m$.

Запишем $k+1$ в виде

$$k+1 = 2^r \cdot s,$$

где 2^r — максимальная степень двойки, на которую делится $k+1$, а s — нечетное число, большее единицы.

Согласно предположению индукции делителями d числа $k+1$ (отличными от $k+1$), для которых $a_d \neq 0$, являются лишь числа $1, 2, 2^2, \dots, 2^r$.

Из соотношения (*)

$$1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2^r-1} - a_{2^r} - a_{k+1} = 0,$$

то есть

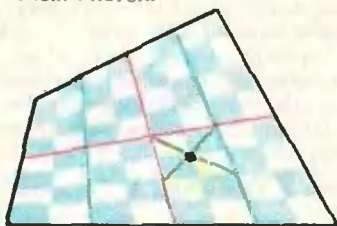
$$a_{k+1} = 1 + 1 + 2 + \dots + 2^{r-1} - 2^r = 0,$$

— и утверждение (I) в случае б) также доказано.

В. Абрамович



M626. Каждая сторона выпуклого четырехугольника разделена на 8 равных частей. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены друг с другом, и полученные клетки раскрашены в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей синих клеток равна сумме площадей белых клеток.



M627. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги записано натуральное число.

а) Пусть каждое из этих чисел встречается ровно один раз. (Приведите примеры такой расстановки чисел!) Докажите, что для любого заданного m найдутся две соседние (имеющие общую сторону) клетки, разность чисел в которых не меньше m .

б) Пусть каждое число $n \in \mathbb{N}$ встречается ровно n раз (то есть 1 — один раз, 2 — два раза и т. д.). Укажите наибольшее число k такое, что обязательно найдутся две соседние клетки, разность чисел в которых не меньше k . (Приведите при-

Поскольку середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма, его средние линии (красные отрезки на рисунке) в точке пересечения делятся пополам. Применяя это соображение к образовавшимся четырехугольникам, получим то же утверждение для их средних линий и т. д., так что каждый из отрезков, соединяющих точки деления на противоположных сторонах данного выпуклого четырехугольника, оказывается разбитым на восемь равных частей.

Рассмотрим теперь «удвоенную клетку» разбивая (размером 2×2 ; на рисунке в ней выделены зеленым цветом диагонали). То, что суммы площадей синих и белых полей этой удвоенной клетки равны, очевидно (площади соответствующих синих и белых треугольничков с общей вершиной и попарно конгруэнтными основаниями одинаковы). Из этого замечания следует утверждение задачи.

В. Произволов



а) Пример расстановки чисел, удовлетворяющей условию а), изображен на рисунке 1.

Докажем утверждение задачи а). Возьмем на нашем листе клетчатой бумаги произвольный квадрат размером $2m \times 2m$ ($m > 1$) клеток. В клетках этого квадрата стоит $4m^2$ различных чисел, так что наибольшее из них отличается от наименьшего по крайней мере на $4m^2 - 1$. Соединим теперь клетки, в которых стоят наибольшее и наименьшее числа, «дорожкой», как показано на рисунке 2. Длина этой «дорожки» не превосходит $4m - 1$, и поэтому хотя бы некоторые из разностей соседних на этой «дорожке» чисел не меньше $\frac{4m^2 - 1}{4m - 1}$, то есть больше m .

б) На рисунке 3 натуральные числа расположены так, что каждое число $n \in \mathbb{N}$ встречается ровно n раз и разности чисел в соседних клетках не превосходят 2. Уменьшить $k+1=2$ нельзя уже потому, что рядом с единицей — четыре клетки, а двоек только две, так что две из соседних с единицей клеток придется заполнить тройками.

Таким образом, искомое k равно 2.

Попробуйте разобраться самостоятельно в следующих вопросах:

мер такой расстановки, в которой разность чисел в любой паре соседних клеток не больше $k+1$.)

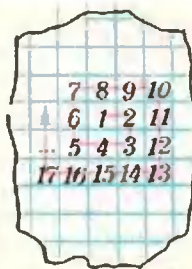


Рис. 1.

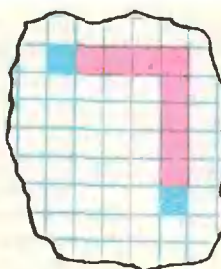


Рис. 2.



Рис. 3.

1. Можно ли расставить числа в клетках бесконечного листа клетчатой бумаги так, чтобы разности чисел, стоящих в соседних клетках, не превосходили 1, если каждое число $n \in \mathbb{N}$ встречается n^2 раз? А $(n+100)$ раз?

2. Пусть пространство разбито на кубические ящички, и в каждый ящичек помещено натуральное число так, что каждое число $n \in \mathbb{N}$ встречается ровно n раз. Каким будет ответ на вопрос, аналогичный вопросу задачи M627?

А. Толпыго

Ф631. Проволочная спираль, присоединенная к городской сети, нагревается электрическим током. Половину спирали начинают охлаждать (например, водой). Как это отражается на количестве тепла, выделяемого этой половиной спирали? другой половиной? всей спиралью?

Обозначим сопротивление каждой половины спирали до начала охлаждения через R . Так как сопротивление металлов зависит от температуры (увеличивается при нагревании и уменьшается при охлаждении), охлаждение одной из половинок спирали приведет к уменьшению сопротивления этой половины до некоторой величины $R_1 < R$. Поскольку напряжение сети U неизменно, это вызовет увеличение тока в цепи и, следовательно, дополнительное нагревание другой половины спирали. Сопротивление этой половины увеличится и станет равным $R_2 > R$.

Новое значение силы тока в цепи $I = \frac{U}{R_1 + R_2}$ будет больше прежнего $I_0 = \frac{U}{2R}$. Действительно, предположим что $I < I_0$.

Тогда сопротивление неохлаждаемой половины спирали останется прежним или уменьшится ($R_2 < R$), а сопротивление охлаждаемой половины $R_1 < R$. Следовательно, общее сопротивление $R_1 + R_2 < 2R$ и новое значение тока $I > I_0$, что противоречит нашему предположению.

Итак, $I > I_0$, и поэтому выделяемая во всей цепи мощность (то есть количество тепла в единицу времени) $P = IU$ увеличится.

Так как $I > I_0$ и $R_2 > R$, количество тепла $P_2 = I^2 R_2$, выделяемое в неохлаждаемой половине, также увеличится.

Мощность $P_1 = I^2 R_1 = \frac{U^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2}$, выделяемая в охлаждаемой половине, наоборот, уменьшится по сравнению с начальной мощностью $P_0 = I_0^2 R = \frac{U^2}{4R}$. Покажем это.

Найдем отношение P_0/P_1 :

$$\frac{P_0}{P_1} = \frac{U^2}{4R} : \frac{U^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{(R_1 + R_2)^2}{4R_1 R}$$

Очевидно, что

$$\frac{(R_1 + R_2)^2}{4R R} > \frac{(R_1 + R_2)^2}{4R_1 R_2},$$

а последнее выражение больше или равно 1, так как среднее геометрическое двух величин ($\sqrt{R_1 R_2}$) не превышает их среднего арифметического $\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)$.

Таким образом, действительно $P_1 < P_0$, то есть мощность, выделяемая в охлаждаемой половине спирали, уменьшится.

Б. Буховцев

Ф632. Оценить, во сколько раз освещенность солнечного зайчика, который получают на вертикальной стене в полдень, меньше освещенности прямыми солнечными лучами, если солнечный зайчик посыпается на стену зеркалом с диаметром $d=10$ см с расстояния $l=50$ см.

В наших широтах лучи Солнца в полдень падают на Землю примерно под углом 60° к горизонту. Значит, освещенность стены

$$E = E_0 \cos 60^\circ = \frac{1}{2} E_0,$$

где E_0 — освещенность перпендикулярной к лучам площадки.

Зеркало нужно расположить так, чтобы отраженные лучи Солнца падали на стенку перпендикулярно. В этом случае освещенность зайчика будет максимальной и равной E_0 (напомним, что при отражении от плоского зеркала сила света изображения такая же, как у источника). Итак, освещенность зайчика может оказаться примерно в 2 раза больше, чем освещенность всей стенки (без учета прямых лучей Солнца).

На экваторе это отношение в полдень будет совсем большим — ведь лучи Солнца практически касаются стенки.

Мы посчитали лучи Солнца параллельными — на расстояниях порядка $l=0,5$ м расхождение $\Delta=l \cdot \varphi \approx 0,5$ см (φ — угловой диаметр Солнца) существенно меньше размеров зайчика.

А. Зильберман

Ф633. Три одинаковых резистора, конденсатор емкостью C и катушка индуктивностью L соединены в цепь, как показано на рисунке 1. Частота ω переменного тока в цепи такова, что $\omega L = 1/\omega C$. При каком сопротивлении R резисторов ток в неразветвленной части цепи в n раз меньше тока в каждой из ветвей?

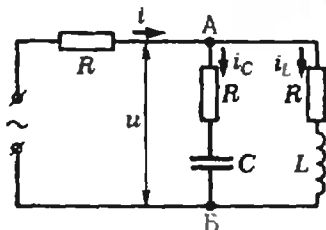


Рис. 1.

На рисунке 1 обозначены мгновенные значения токов в неразветвленной части цепи (i) и в ветвях (i_c, i_l), а также мгновенное значение напряжения u на разветвлении (между точками А и В).

Для решения задачи построим векторные диаграммы для действующих значений напряжений и токов. Колебания напряжения на активном сопротивлении совпадают по фазе с колебаниями тока через него; колебания напряжения на конденсаторе отстают по фазе на $\pi/2$ от колебаний тока через него; колебания напряжения на катушке опережают по фазе на $\pi/2$ колебания тока через нее. Векторная диаграмма (см. Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев «Физика 10», 1980, § 26) для емкостной ветви — на рисунке 2, а, для индуктивной — на рисунке 2, б, а для разветвления — на рисунке 2, в, на котором вектор \vec{U} есть вектор действующего напряжения на разветвлении.

По условию задачи $\omega L = 1/\omega C$, то есть $X_L = X_C$. Значит, токи в ветвях одинаковы по величине — $I_c = I_l$, ток I_c в емкостной ветви опережает на угол φ напряжение на ней, а ток I_l в индуктивной ветви отстает от того же напряжения на такой же угол.

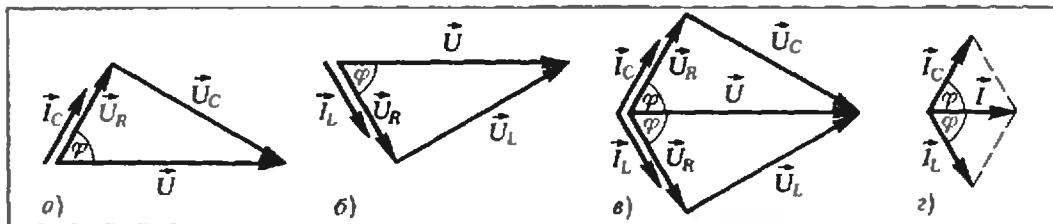


Рис. 2.

Из рисунка 2, в находим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_C}{U_R} = \frac{I_c X_C}{I_c R} = \frac{X_C}{R} = \frac{X_L}{R}. \quad (1)$$

На векторной диаграмме для токов (рис. 2, г) вектор \vec{I} есть вектор действующего значения тока в неразветвленной части цепи. По условию задачи $I:I_c = \frac{1}{n}$. Из рисунка 2, г находим:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} I:I_c = \frac{1}{2n}. \quad (2)$$

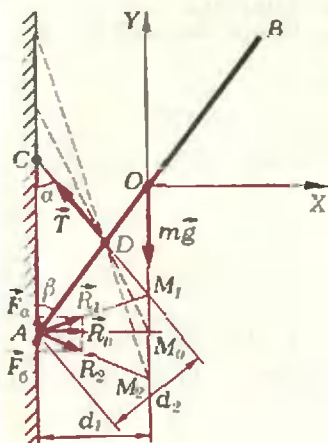
Из (1) и (2) получаем:

$$R = \frac{X_c}{\sqrt{4n^2 - 1}} = \frac{l}{\omega C \sqrt{4n^2 - 1}} = \frac{\omega L}{\sqrt{4n^2 - 1}}$$

Резистор в неразветвленной части цепи влияет только на величину напряжения на зажимах всей цепи. Если в качестве резисторов взять три одинаковые лампы накаливания, то лампы в неразветвленной части цепи могут быть темной при полном накале ламп в ветвях (при достаточно большом n).

Г. Савкун

Ф634. Стержень AB длиной l и массой m нижним концом опирается на стену и с помощью нити удерживается в наклонном положении (см. рисунок). Нить привязана к стене в точке C , а к стержню — в точке D так, что $|AD| = \frac{1}{3}|AB|$. Углы, составляемые нитью и стержнем со стеной, равны α и β соответственно. Найти возможные значения коэффициента трения между стержнем и стеной.



На стержень действуют три силы: сила \vec{T} натяжения нити, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции со стороны стенки $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$ (\vec{N} — сила нормальной реакции, $|F_{\text{тр}}| < \mu|\vec{N}|$ — сила трения). В состоянии равновесия стержня сумма моментов этих сил относительно любой точки равна нулю. Чтобы это условие выполнялось, линия действия силы \vec{R} должна проходить через точку пересечения линий действия сил \vec{T} и $m\vec{g}$ (моменты сил \vec{T} и $m\vec{g}$ относительно этой точки равны нулю).

В зависимости от соотношения между углами α и β точка пересечения линий действия сил \vec{T} и $m\vec{g}$ может лежать: а) выше перпендикуляра AM_0 к стене (точка M_1 на рисунке), б) ниже этого перпендикуляра (точка M_2), в) на нем (точка M_0). Соответственно сила трения направлена либо вдоль AC вверх (\vec{F}_a), либо вдоль AC вниз (\vec{F}_a), либо равна нулю. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

а) Условие равновесия стержня:

$$T \cos \alpha + F_a - mg = 0, \quad N - T \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

— равенство нулю суммы проекций всех сил на оси Y и X соответственно;

$$d_1 mg = d_2 T, \quad \text{или} \quad \frac{mgl}{2} \sin \beta = \frac{Tl}{3} \sin(\alpha + \beta) \quad (2)$$

(см. рисунок). Из (1) и (2) имеем

$$\mu_a > \frac{F_a}{N} = \frac{2}{3} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} - \frac{1}{\lg \alpha} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\lg \beta} - \frac{1}{\lg \alpha} \right)$$

(Случай а) осуществляется при условии $2(\lg \alpha > \lg \beta)$.

б) Записав условия равновесия, найдем:

$$\mu_b > \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\lg \alpha} - \frac{2}{\lg \beta} \right)$$

(Этому случаю соответствует условие $\lg \beta > 2 \lg \alpha$.)

в) В этом случае стержень находится в равновесии при любом значении μ_a ($2 \lg \alpha = \lg \beta$).

Таким образом, при произвольном соотношении между углами α и β стержень находится в равновесии при

$$\mu > \frac{1}{3} \left| \frac{1}{\lg \alpha} - \frac{2}{\lg \beta} \right|$$

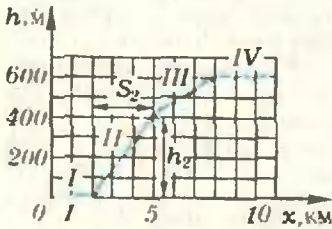
К. Сергеев

Ф635. Два одинаковых автомобиля массой $m = 10^3$ кг движутся вверх по одной и той же горной дороге. Зависимость высоты h дороги от расстояния x до начала подъема показана на рисунке. Каждый автомобиль развивает постоянную мощность $P = 12$ кВт, а сила сопротивления движению автомобиля пропорциональна квадрату его скорости: $|\vec{F}| = \alpha|\vec{v}|^2$, где $\alpha = 1,4$ кг/м. На последнем го-

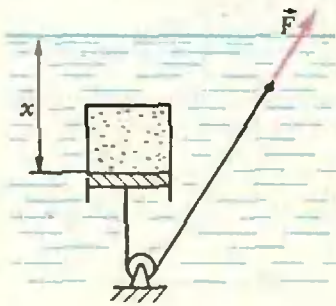
Так как автомобили проходят подъем в одном и том же режиме, расстояние между ними на горизонтальном участке I (до подъема; см. рисунок) такое же, как на участке IV (после подъема), а именно $l = 100$ м. При въезде первого автомобиля на участок II его скорость падает, и расстояние между автомобилями уменьшается. Когда первый автомобиль въезжает на участок III , его скорость возрастает, и расстояние увеличивается; то же самое происходит при въезде на участок IV . Следовательно, минимальное расстояние между автомобилями будет на участке II .

За время t , в течение которого первый автомобиль движется по участку II , а второй — еще по участку I , второй автомобиль проходит расстояние l , а первый — некоторое расстояние $l' < l$. Очевидно, расстояние l' между автомобиля-

горизонтальном участке дороги расстояние между автомобилями равно 100 м. Каким было минимальное расстояние между автомобилями при их движении?



Ф636. Цилиндрический сосуд, закрытый невесомым поршнем площадью сечения S , содержит газ под атмосферным давлением p_0 . Объем газа при этом равен V_0 . Сосуд погружают в воду (плотностью ρ_0) так, как показано на рисунке. Найти зависимость расстояния x между поршнем и поверхностью воды от модуля F силы, удерживающей нить, которая привязана к поршню.



Ф637. В сверхпроводящих катушках с индуктивностями L_1 и L_2 , включенных параллельно, возбужден ток. Индуктивность L_1 одной из катушек уменьшается до нуля. Во сколько раз изменятся при этом ток в цепи и энергия системы?

ми на участке II и есть искомое минимальное расстояние между автомобилями.

Найдем скорости автомобилей на участках I и II. На участке I работа совершается только против сил сопротивления. На этом участке баланс энергии можно записать следующим образом:

$$P = |\vec{F}_1| |\vec{v}_1| = \alpha |\vec{v}_1|^3. \quad (1)$$

На участке II добавляется работа против силы тяжести:

$$P = |\vec{F}_2| |\vec{v}_2| + m |\vec{g}| \frac{h_2}{S_2 / |\vec{v}_2|} = \alpha |\vec{v}_2|^3 + m |\vec{g}| |\vec{v}_2| \frac{h_2}{S_2}. \quad (2)$$

Наклон h_2/S_2 определяем из графика: $h_2/S_2 = \frac{4}{30}$.

Из уравнения (1) находим: $|\vec{v}_1| \approx 20,5$ м/с. Следовательно, $\tau = \frac{l}{|\vec{v}_1|} \approx 4,9$ с. Из уравнения (2) находим: $|\vec{v}_2| = 8,5$ м/с.

За время τ первый автомобиль пройдет расстояние $l' = |\vec{v}_2| \tau = 41,6$ м. Это и есть минимальное расстояние между автомобилями.

Рекомендуем самостоятельно проанализировать движение автомобилей при переходе с горизонтального участка I на участок II и убедиться, что учет плавного характера изменения скорости от значения $|\vec{v}_1|$ до значения $|\vec{v}_2|$ не меняет ответа задачи.

В. Белонучкин

Запишем уравнение состояния газа в цилиндре (закон Бойля — Мариотта), когда поршень находится на некоторой глубине x под водой:

$$p_0 V_0 = pV = phS. \quad (1)$$

где p — давление в цилиндре, а h — расстояние от дна цилиндра до поршня. Условие равновесия поршня на глубине x —

$$pS + F = (p_0 + \rho_0 g x) S. \quad (2)$$

Условие равновесия цилиндра —

$$pS = [p_0 + \rho_0 g (x - h)] S + Mg, \quad (3)$$

где M — масса цилиндра.

Решая совместно уравнения (1), (2), (3), получим:

$$x = \frac{\rho_0 V_0 \rho_0 g S + MgF + F^2 - p_0 SF - p_0 SMg}{\rho_0 g S (F + Mg)}, \quad (4)$$

или, если цилиндр невесом,

$$x = \frac{\rho_0 V_0 \rho_0 g S + F^2 - p_0 SF}{\rho_0 g SF}. \quad (5)$$

Соотношения (4) и (5) справедливы, очевидно, лишь тогда, когда цилиндр полностью погружен в воду.

В. Белонучкин

Будем считать, что катушки разнесены достаточно далеко и взаимную индукцию можно не учитывать. Так как катушки сверхпроводящие, магнитный поток Φ , пронизывающий их, остается постоянным. Из этого условия находим:

$$\Phi = L_1 I_0 + L_2 I_0 = L_2 I_{(1)} \quad (1)$$

— в случае, когда обмотки катушек одинаково ориентированы относительно направления тока в цепи (рис. 1), и

$$\Phi = L_1 I_0 - L_2 I_0 = L_2 I_{(2)} \quad (2)$$

— когда обмотки ориентированы по-разному (рис. 2). В (1) и (2) I_0 — начальный ток в цепи, I — ток в конце процесса.

Энергия системы в начале процесса равна $E_0 = \frac{L_1 + L_2}{2} I_0^2$.

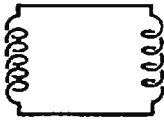


Рис. 1.

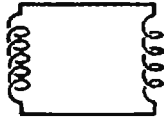


Рис. 2.

В первом случае

$$\frac{I_{11}}{I_0} = 1 + \frac{L_1}{L_2}.$$

Энергия системы в конце процесса в этом случае равна

$$E_{111} = \frac{L_2 I_{11}^2}{2} = \frac{L_1 + L_2}{2} I_0^2 \left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right) = E_0 \left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right),$$

откуда

$$\frac{E_{111}}{E_{101}} = 1 + \frac{L_1}{L_2}.$$

Во втором случае

$$\frac{I_{12}}{I_0} = 1 - \frac{L_1}{L_2}.$$

$$E_{121} = \frac{L_2 I_{12}^2}{2} = \frac{(L_2 - L_1)^2}{2L_2} I_0^2.$$

$$\frac{E_{121}}{E_0} = \frac{(L_2 - L_1)^2}{L_2(L_1 + L_2)}.$$

П. Зубков

К центру тяжести

Как ведет себя система одинаковых частиц, правяла движения каждой из которых зависят лишь от небольшого числа ее соседей? Такие вопросы возникают во многих математических моделях физических, химических, биологических объектов, и ответы на них, как правило, получить очень трудно. В этой заметке мы решим одну задачу такого типа (М604 из Задачника «Кванта»), где правила движения частиц выражаются линейными функциями, что позволяет получить простой ответ: частицы сближаются к общему центру тяжести.

Формулировка задачи

а) Андрей, Виктор, Сергей, плавающие под водой, одновременно вынырнули в точках A_0, B_0, C_0 и тут же нырнули снова, причем Андрей решил проплыть за минуту треть пути до Виктора, Виктор — треть пути до Сергея, Сергей — треть пути до Андрея. Через минуту они вынырнули вновь (точки A_1, B_1, C_1 — см. рис. 1) и решили повторить этот маневр — уже за полминуты; потом за четверть минуты и т. д.

Где и когда они встретятся?

б) Внутри сферы радиуса 1 км расположен миллион точек, занумерованных числами от 1 до миллиона. Каждую секунду одновременно каждая точка движется к следующей по номеру на $1/3$ расстояния до этой точки; последняя точка точно так же движется к первой. Докажите, что через некоторое время все точки соберутся внутри некоторой сферы радиуса 1 см.

Решение задачи а)

Докажем, что все точки A_k, B_k и C_k стремятся в пределе к центру тяжести Q треугольника — точке пересечения его медиан; в этом смысле можно сказать, что Андрей, Виктор и Сергей встретятся через $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$ минуты в точке Q (хотя, конечно, даже дельфины не смогли бы так быстро поворачиваться и кувыряться, как это придется делать нашим пловцам к концу второй минуты).

Примем Q за начало координат и воспользуемся векторной записью преобразования

$$(A_k, B_k, C_k) \xrightarrow{L} (A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}).$$

Как нетрудно видеть (рис. 2), для каждого $k=0, 1, 2, \dots$

$$\vec{QA}_{k+1} = \frac{2\vec{QA}_k + \vec{QB}_k}{3},$$

$$\vec{QB}_{k+1} = \frac{2\vec{QB}_k + \vec{QC}_k}{3}, \quad (L)$$

$$\vec{QC}_{k+1} = \frac{2\vec{QC}_k + \vec{QA}_k}{3}.$$

Из этих формул сразу следует, что точка Q является общим центром тяжести всех треугольников $A_k B_k C_k$: $\vec{QA}_k + \vec{QB}_k + \vec{QC}_k = \vec{0}$ (рис. 3).

Более того, преобразование $L^2 = L \circ L$, как видно из формул

$$\vec{QA}_{k+2} = \frac{4\vec{QA}_k + 4\vec{QB}_k + \vec{QC}_k}{9} = -\frac{\vec{QC}_k}{3},$$

$$\vec{QB}_{k+2} = -\frac{\vec{QA}_k}{3}, \quad \vec{QC}_{k+2} = -\frac{\vec{QB}_k}{3},$$

— гомотетия с коэффициентом $(-1/3)$ и центром Q (см. рис. 1). Таким образом, если треугольник $A_0 B_0 C_0$ лежит в круге радиуса R с центром в точке Q , то треугольник $A_{2k} B_{2k} C_{2k}$ и все следующие треугольники будут

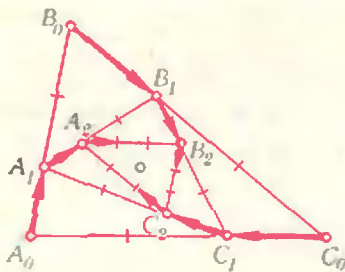


Рис. 1.

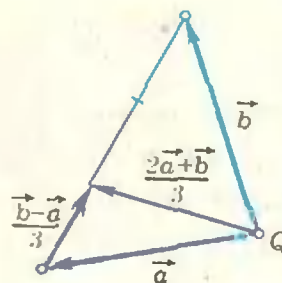


Рис. 2.

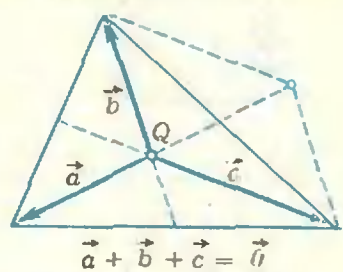


Рис. 3.

лежать в круге радиуса $\frac{R}{3}$ с тем же центром. Это означает, что общим пределом последовательностей $(A_k), (B_k), (C_k)$ служит точка Q .

Решение задачи б)

Докажем, что и в этом случае все точки со временем соберутся вблизи центра тяжести Q .

Центр тяжести системы m точек — это такая точка Q , что $\vec{OQ} = \frac{1}{m} \sum \vec{OA}_i$ при любой точке O ; легко доказать, что в любой системе $Oxyz$ центр тяжести Q точек $A(x; y; z)$ имеет координаты $(\frac{\sum x_i}{m}; \frac{\sum y_i}{m}; \frac{\sum z_i}{m})$. (Здесь и далее сумма \sum берется по всем i от 1 до m .) Мы должны доказать, что точки стремятся к общему пределу Q .

Если принять центр тяжести Q за начало координат, то формулы для координат «продвинутых» m точек будут аналогичны формулам (1) для векторов:

$$\bar{x}_1 = \frac{2x_1 + x_2}{3}, \quad \bar{x}_2 = \frac{2x_2 + x_3}{3},$$

$$\dots, \quad \bar{x}_m = \frac{2x_m + x_1}{3} \quad (L)$$

(формулы для координат y и z точно такие же). Конечно, преобразование $(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ сохраняет центр тяжести Q : если $\sum x_i = 0$, то и $\sum \bar{x}_i = 0$. Однако объяснить, почему преобразование L для $m > 3$ точек будет «сжимающим», значительно сложнее. Приведем два, но-видному, наиболее изящных доказательства.

1. Докажем, что существует такое (зависящее от m) число $q < 1$, что, каков бы ни был набор m чисел (x_1, \dots, x_m) с $\sum x_i = 0$, для преобразованного набора чисел $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$ будет $\sum \bar{x}_i^2 < q \sum x_i^2$.

Как легко проверить*).

$$\sum \bar{x}_i^2 = \sum x_i^2 - \frac{2}{9} \sum (x_i - x_{i-1})^2.$$

Положим $\sum x_i^2 = R^2$ и грубо оценим снизу последнюю сумму. Поскольку среди x_i встречаются числа разных знаков, а наибольшее из них по модулю меньше R/\sqrt{m} , хотя бы одна

разность $|x_i - x_{i+1}|$ больше $R/m\sqrt{m}$. В самом деле, предположим противное: пусть для всех k разности $|x_k - x_{k+1}|$ меньше $R/m\sqrt{m}$. Возьмем то i , для которого координата x_i максимальна по модулю; тогда $|x_i| > R/\sqrt{m}$. По предположению, соседние точки отстоят на расстоянии, меньшем $R/m\sqrt{m}$. Переходя от точки x_i к точке x_{i+1} , мы за m шагов пройдем расстояние, меньшее R/\sqrt{m} , то есть не перейдем через 0, что и даст нужное противоречие. Поэтому $\sum (x_i - x_{i+1})^2 > R^2/m^3$,

так что $\sum \bar{x}_i^2 < (1 - \frac{2}{9} m^3) \sum x_i^2$.

II. (основано на письме десятиклассника Д. Короткина из Ленинграда). Запишем формулы для итерации (повторения) преобразования L :

$$x_1^{(1)} = \frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2,$$

$$x_1^{(2)} = \frac{4}{9} x_1 + \frac{4}{9} x_2 + \frac{1}{9} x_3,$$

$$x_1^{(3)} = \frac{8}{27} x_1 + \frac{12}{27} x_2 + \frac{6}{27} x_3 + \frac{1}{27} x_4,$$

вылоть до $(m-1)$ -го шага:

$$x_1^{(m-1)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} x_1 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} x_m.$$

В последнем равенстве, как и в предыдущих, сумма всех коэффициентов равна 1, но, в отличие от предыдущих, коэффициенты при всех x_1, \dots, x_m в нем строго больше нуля*); наименьший из них $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}$. Вычтя почленно из последнего равенства такое:

$$0 = ax_1 + ax_2 + \dots + ax_{m-1} + ax_m,$$

мы получим для $(m-1)$ -кратной итерации $L^{(m-1)}$ формулы $x_i^{(m-1)} = \sum_{j=1}^m b_j x_{i+j-1}$,

где все $b_j > 0$ и $\sum b_j = b$ строго меньше 1.

Отсюда уже легко вывести, что за $m-1$ итерацией преобразования L величина $\sum |x_i|^{m-1}$ (или $\max_i |x_i|^{m-1}$) станет не больше $b \sum |x_i|$ (соответственно, $b \max_i |x_i|$).

*). Коэффициенты в формуле для $x_1^{(k)}$ равны коэффициентам при степенях k многочлена $(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} a)^k$, то есть $C_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ ($j=0, 1, \dots, k$); впрочем, эти формулы в дальнейшем не используются.

*) Ниже x_{m+1} означает x_1 и вообще $x_{m+i} = x_i$ (индексы складываются «по модулю m »).

Обсуждение

Каждое из двух рассуждений I, II показывает, что последовательности точек $(A_i^{(k)})$ ($i=1, 2, \dots, m$), получаемые итерациями ($k=1, 2, 3, \dots$) нашего преобразования, стремятся к Q не медленнее, чем некоторая геометрическая прогрессия (со знаменателем

q в случае I, $\sqrt[3]{b}$ — в случае II). Конечно, эти оценки скорости сходимости довольно грубы. Методами анализа и линейной алгебры, выходящими за рамки школьной программы, можно найти точную оценку вида Cq_m^k для расстояния точек от центра Q (через k шагов). Оказывается, значение константы $q_m < 1$, определяющей скорость сходимости для всех начальных расположений, остается таким же для плоского правильного m -угольника.

У п р а ж н е н и е 1. а) Докажите, что если точки A_1, A_2, \dots, A_m расположены в вершинах правильного m -угольника, вписанного в окружность ζ центром Q и радиусом 1, то точки A_1, A_2, \dots, A_m , которые получаются из них под действием преобразования I , расположены в вершинах правильного m -угольника, вписанного в окружность с тем же центром Q и радиусом

$$q_m = \sqrt{5+4 \cos 2\pi/m}/3 < 1$$

(в частности, $q_3 = \sqrt{3}/3$, $q_4 = \sqrt{5}/3$, $q_6 =$

$= \sqrt{7}/3$ и при больших m величина $q_m \approx 1 - 4\pi^2/9m^2$ близка к 1).

б) Какова будет константа q_m для аналогичной задачи, в которой A_i проходит не $1/3$, а $1/q$ расстояния до A_{i+1} ($q > 0$)? Рассмотрите частный случай $q=2$, для которого константы q_m наименьше.

Более того, если посмотреть на наши m точек через большой промежуток времени k в микроскоп с увеличением $1/q_m^k$, то мы увидим, что они (при начальных данных «общего положения») находятся вблизи вершин некоторого «сжатого» правильного m -угольника, вписанного в эллипс (сжатую окружность). Так будет, если дело происходит на плоскости или в пространстве. А для аналогичной задачи на прямой m точек будут близки к проекциям вершин некоторого правильного m -угольника на эту прямую.

У п р а ж н е н и е 2. а) Пусть из m чисел (x_1, \dots, x_m) получаются новые m чисел по правилу $x_i = \alpha x_i + \beta x_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, m-1$), $x_m = \alpha x_m + \beta x_1$ ($\alpha + \beta < 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$). Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ после некоторого количества таких преобразований все числа будут меньше ε .

б) Докажите, что набор $(x_i = a \cos(\varphi + 2\pi i/m), i=1, 2, \dots, m)$ переходит в аналогичный набор с другими «амплитудой» a и «фазой» φ . Во сколько раз уменьшается амплитуда a за один шаг?

Н. Васильев

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М616—М625 и Ф618—Ф632 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Большинство читателей, приславших решения задач М616—М625, успешно справились с задачами М617, М621. Остальные задачи решили: Э. Абдулаев (Масаллы) 9,0,4; И. Азаренко (Саратов) 9; А. Аришкин (Новокузнецк) 6; М. Арасланов (Запорожье) 9,0; Я. Базилий (Донецк) 4; А. Барс (Николаев) 6, 9, 0,4; Ю. Белоцерковский (Минск) 9, 0, 3, 4, 5а); В. Бережной (Киев) 4; И. Блауштейн (Жмеринка) 4; А. Болдырихин (Могилев-Подольский) 0; А. Брудный (Ярославль) 6, 8—0, 3, 5а); В. Валуев (Тула) 4; А. Вольнов (Киев) 0; М. Гайсинский (Ташкент) 8, 0; В. Гешкенбейн (Москва) 4; М. Гликман (Кишинев) 4, 5а); Г. Голович (Славянск) 4; С. Горшков (Москва) 4; Е. Горшкова (Пермь) 4; О. Гринив (Киев) 4; А. Гутин (Клиппы) 6, 9, 4; В. Денисов (Кашира) 3, 4; В. Денисов (Москва) 6; А. Дернов (Череповец) 4; Ю. Дибнер (Москва) 6, 4; О. Дранко (Киев) 9, 4; О. Ершовкин (Днепропетровск) 6, 8, 0, 2, 4; И. Жуков (Ленинград) 6, 0, 2, 4; А. Зега (Минск) 6, 9; А. Золотых (Курск) 6, 4; З. Ибрагимов

(Масаллы) 9, 4; В. Ильин (Донецк) 9; А. Кагарманов (Белоречк) 6, 9, 0, 4, 5а); А. Каплан (Сумгаит) 9; Е. Карцова (Ленинград) 9; А. Карпович (Киев) 6; В. Ким (Бектемир) 6; С. Ким (Бектемир) 6, 9, 0, 4; Л. Киричук (с. Мошурово Черкасской обл.) 4; В. Кисиль (Одесса) 4; И. Колпаков (Сочи) 9, 0, 2—4; А. Коньшин (Ростов-на-Дону) 0; А. Корнилов (Ростов-на-Дону) 6; Д. Короткин (Ленинград) 6, 8—0, 4; А. Коротов (Горький) 3; С. Краус (Караганда) 9; С. Лямихов (Ташкент) 0, 3, 4, 5а); И. Ланджев (Бургас, ПРБ) 9; В. Левин (Москва) 4; С. Леник (с. Горичевка Винницкой обл.) 9; О. Малов (Казань) 4; С. Мамедов (Баку) 9, 4; В. Мангазеев (Кемерово) 9, 4, 5а); С. Матюшов (Вологда) 4; Л. Меркляшус (Литварис) 6, 8—0, 3, 4, 5а); С. Мокроусов (Ленинград) 6, 3, 4; С. Морейно (Москва) 6, 8, 4; Ю. Назаренко (Киев) 6, 8—0, 4, 5а); А. Никонов (Кировоград) 9, 0; И. Овчинников (Вязьники) 6, 9, 4; М. Окרון (Ереван) 9, 0, 4; К. Пезих (Павловский Посад) 4, 5а); Г. Перельман (Ленинград) 9, 2—4, 5а); А. Поезд (Москва) 6, 9, 0, 4; Е. Птич (Белоречк) 4; Ю. Рачинский (Москва) 3; В. Романюк (с. Кусвище Волынской обл.) 0, 3; И. Сайгина (Саратов) 9; Э. Сидимов (Кировоград) 9; М. Сафаров (Фрунзе) 6, 3; В. Светлицкий (Запорожье) 4; А. Слинкин (Москва) 0; А. Смирнов (Курган) 4; А. Стивак (Стерлитамак) 0, 2, 4; С. Сличак (Припять) 9, 0, 4; А. Сромин (Ленинград) 9; Э. Степанян (Баку) 9, 0, 4; С. Стрельцов (с. Ивановка Запорожской обл.) 4; Д. Суворов (Свердловск) 4; А. Тажка (Краков, ПНР) 8; С. Тимофеев (с/х Саханка Донецкой

обл.) 8, 9; *В. Титенко* (д. Блужа Минской обл.) 9, 3, 4; *С. Ткаченко* (Могилев—Подольский) 0; *К. Томилин* (Москва) 9, 4; *Р. Угриковский* (Хмельник) 9, 4; *О. Фонарев* (Сумгаит) 4; *А. Харитонский* (Киев) 9, 4; *А. Хилков* (Новомосковский) 2, 4; *С. Хосид* (Алма-Ата) 9, 4; *В. Цекановский* (Донецк) 9, 4; *С. Цветков* (Ленинград) 4; *И. Цимох* (Кировоград) 9, 4; *В. Цыгикало* (Грозный) 9; *О. Чалых* (Витебск) 6, 9, 0, 4, 5а); *А. Чистоклетов* (п. Мулловка Ульяновской обл.) 6; *З. Шибзухов* (Нальчик) 9; *Л. Элькун* (Ташкент) 0, 5а); *Л. Эпредидзе* (Тбилиси) 9; *В. Юдаков* (п. Армянск Крымской обл.) 6, 8.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач Ф618—Ф632, справились с задачами Ф622, Ф624, Ф626 и Ф630. Остальные задачи правильно решили: *В. Аветисов* (Баку) 18, 19, 23, 27, 28, 31; *И. Аглиуллин* (Москва) 18, 21, 27, 31; *А. Аккозов* (Фрунзе) 23; *А. Аколян* (Ереван) 27; *З. Али-Заде* (Баку) 27; *К. Аракелов* (Моздок) 25; *А. Арзуманов* (Тбилиси) 27; *А. Ахметзянов* (Уральск) 18—20, 27, 28; *А. Бабаев* (Баку) 27; *О. Бабий* (Киев) 18, 19, 21; *А. Баглюк* (Киев) 18; *П. Байков* (Балашиха) 17—19, 21; *О. Барабаш* (Киев) 27; *С. Барабаш* (Калинин) 25, 27; *Е. Бегманов* (Нукус) 25; *В. Белоцерковский* (Донецк) 25, 27; *В. Бережной* (Киев) 18, 20, 21, 27; *А. Благодарев* (Пенза) 27; *В. Бобов* (Ленинград) 23; *И. Богиевский* (Калининград Московской обл.) 23; *Г. Бордаков* (Куйбышев) 23, 27; *А. Бунятин* (Ереван) 31; *О. Буракова* (Алма-Ата) 25; *Е. Бургорин* (Казань) 18, 27; *С. Бучнев* (Суходольск) 25; *Э. Вайслеб* (Киев) 18, 19, 21; *М. Видула* (Одесса) 25, 27; *В. Вальков* (Краснодон) 27; *А. Вальков* (Киев) 23; *В. Васильев* (Великие Луки) 18, 20; *В. Васильев* (д. Тобурданово ЧувАССР) 19, 23; *В. Вачев* (Ямбол, НРБ) 20, 25; *Б. Вейцман* (Одесса) 18, 21, 25, 27, 29; *А. Вернега* (ст. Староинская Краснодарского кр.) 21, 27; *В. Вишневский* (Андрушевка) 25; *А. Владимиров* (Пушино) 18, 21, 28, 29; *Ю. Воюжогон* (п. Любеч Черниговской обл.) 23, 25, 27; *Ю. Воеводич* (Гомсель) 28, 31; *С. Вознюк* (Харьков) 18, 19; *Е. Войтенко* (Киев) 19, 27, 29, 31; *А. Вольнов* (Киев) 19, 21; *А. Воробьев* (Ярославль) 18; *В. Воробьев* (Киев) 18, 21, 27; *В. Ворона* (Славинск) 18, 19, 21, 23, 25, 27, 31; *Р. Върбанов* (Тервил, НРБ) 19—21, 28; *Г. Гаев* (Саратов) 25, 27; *О. Гайсинский* (Запорожье) 31; *И. Галич* (Москва) 19, 21—23, 27, 29, 32; *М. Гапонова* (Горький) 25, 27, 31; *Е. Гисанова* (п. Ярдымлы АзССР) 18; *М. Глижман* (Кичинево) 25, 27; *А. Гоголин* (Тбилиси) 21; *С. Голощапов* (Запорожье) 18, 21; *А. Голубков* (Шелково) 25; *С. Голубничий* (Казатинский р-н Винницкой обл.) 25, 27; *С. Горбачевский* (Минск) 18; *М. Горбунов* (Горький) 25; *А. Григоренко* (Максевка) 23, 25, 29, 31; *Д. Григорьев* (Москва) 18, 20, 21, 23, 27—29, 31, 32; *И. Гру* (Северодонецк) 31; *С. Грязнов* (Киев) 19, 21, 27, 31; *И. Губин* (Ереван) 18, 25, 27, 28, 31; *И. Гунромский* (Минск) 18, 19, 21; *А. Гутин* (Клиницы) 20, 21, 23, 27, 28, 31; *С. Давыдов*

(Ташкент) 18; *И. Далин* (Черновцы) 23, 27, 31; *В. Дворцовой* (Липецк) 18, 25, 27, 29, 31, 32; *Т. Демьянков* (Ровно) 25; *И. Дерebas* (Магнитогорск) 27; *С. Джакелов* (Алма-Ата) 25; *М. Джикия* (Цхалтубо) 18; *И. Дмитриев* (Донецк) 25, 31; *В. Добрецов* (Москва) 23; *А. Долгополов* (Дрокия) 23, 28, 31; *С. Долгополов* (Полтава) 28; *С. Дорфман* 21, 27; *Д. Дубсон* (Кривой Рог) 27; *А. Дурбак* (Рогатин) 18, 27; *В. Дятьков* (Кировабад) 19, 28; *С. Евдокимов* (Витебск) 23, 25, 27, 31; *И. Елишевич* (Чернигов) 18, 21, 25, 27; *И. Ельканович* (Баку) 23; *В. Емец* (Днепропетровский) 18, 19; *Л. Есикович* (Минск) 27, 28; *В. Ефремов* (Апрелевка) 23; *А. Жупинский* (Молодечно) 23, 25, 27; *В. Забросаев* (Бендеры) 25; *М. Заляядутдинов* (Магнитогорск) 23; *А. Заневский* (Ленинград) 21; *М. Заплетин* (Алма-Ата) 18; *В. Зац* (Ташкент) 27; *Ю. Звягинцев* (Харьков) 21, 25, 29, 31; *М. Зейфман* (Вологда) 18, 25, 27—29, 31, 32; *И. Златогорская* (Саратов) 25, 27, 29; *В. Золотиревский* (п/о Березовское Харьковской обл.) 23, 27; *А. Золотых* (Курск) 28, 31; *В. Зубяк* (Нововольноск) 20; *И. Зыбцев* (Ужур) 25, 27; *И. Иванов* (с. Мошенское Новгородской обл.) 27; *В. Ивахненко* (Киев) 18, 21; *В. Изергин* (Новосибирск) 23; *А. Изимберов* (Оренбург) 19; *В. Израилит* (Днепропетровский) 18, 19, 23, 25, 31; *В. Истретий* (п. Глодяны МССР) 27; *О. Исупова* (Оренбург) 18, 25; *В. Кагаловский* (Харьков) 25, 28, 31; *В. Каллер* (Киев) 21; *С. Калмыков* (Копейск) 25, 27; *В. Калинин* (Ленинград) 27; *А. Калининченко* (Сумы) 27; *Б. Калмахелидзе* (Тбилиси) 27; *Ю. Канский* (с. Городовка Винницкой обл.) 25, 31; *А. Каплан* (Сумгаит) 25; *М. Качкачишвили* (Рустави) 27; *А. Кечеджян* (Ереван) 28, 31; *С. Кемельбаев* (Темиртау) 27; *Ю. Кирпач* (Киев) 23, 28; *А. Коган* (Одесса) 27, 31, 32; *С. Козлов* (Москва) 18, 19, 28, 31, 32; *Ю. Кошаров* (Мытищи) 23, 25; *В. Комов* (Александров) 18, 19, 21, 23, 25, 27; *И. Компонецев* (Алма-Ата) 18, 27, 31; *О. Копорчук* (Запорожье) 29; *И. Констанкевич* (Львов) 18, 19; *В. Коробов* (Кировоград) 18, 23, 25, 27, 31, 32; *А. Коровин* (Мичуринск) 27; *К. Корчагин* (Ереван) 23, 25; *А. Костерин* (Владимир) 25; *А. Костюковский* (Харьков) 25, 28, 31; *А. Кравчук* (Симферополь) 25; *М. Кравцов* (Коммунарск) 23, 25; *А. Крейнс* (Кольчугино) 29, 31; *Е. Кренцель* (Москва) 18, 27; *Р. Крис* (Киев) 27; *И. Круглова* (Череповец) 25, 27; *А. Кубышкин* (Киев) 18, 21, 25, 27; *Л. Кудрявцев* (Нефтекамск) 20; *А. Кулыгин* (Москва) 25; *Д. Курьшев* (Горький) 18; *Л. Кучук* (Минск) 18, 31; *А. Кясов* (Нальчик) 25; *Б. Ланидзе* (Москва) 23, 25, 27; *В. Левин* (Москва) 25; *С. Ленив* (Ангарск) 18, 19, 25; *С. Летягин* (п. Страшены МССР) 23, 31; *И. Лисовский* (Минск) 25, 27; *Ю. Логвин* (Лида) 28, 31; *А. Лубин* (Чирчик) 18, 20; *И. Лукьянчук* (Киев) 18; *О. Лысенко* (Мичуринск) 27; *В. Любовицкий* (Кострома) 25; *А. Ляпин* (Москва) 18, 19, 21, 23, 25, 28, 29, 31, 32; *О. Малов* (Казань) 21, 27, 31; *А. Малыгин* (Горький) 18, 23, 25; *И. Мандриченко* (Киев) 27; *О. Мануйленко* (Херсон) 18, 21, 27—29, 31, 32; *И. Мартыненко* (Лысичанск) 19; *С. Медведев* (Дмитров) 25, 27; *Г. Мелкоян* (Продолжение см. на с. 45)

Задачи

1. В примере, изображенном на рисунке, некоторые цифры заменены звездочками. Восстановите недостающие цифры.

2. При каком основании системы счисления число 1111 является полным квадратом? А число 11111?

3. Из девяти цифр 1,2,3,...,8,9 составьте три трехзначных числа, которые относятся, как а) 1:3:5; б) 1:2:3.

Сколько решений имеет задача б)?

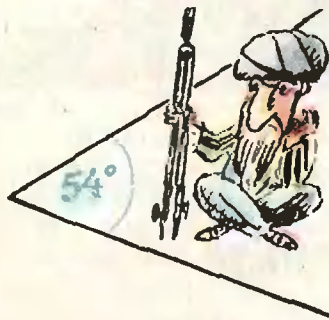
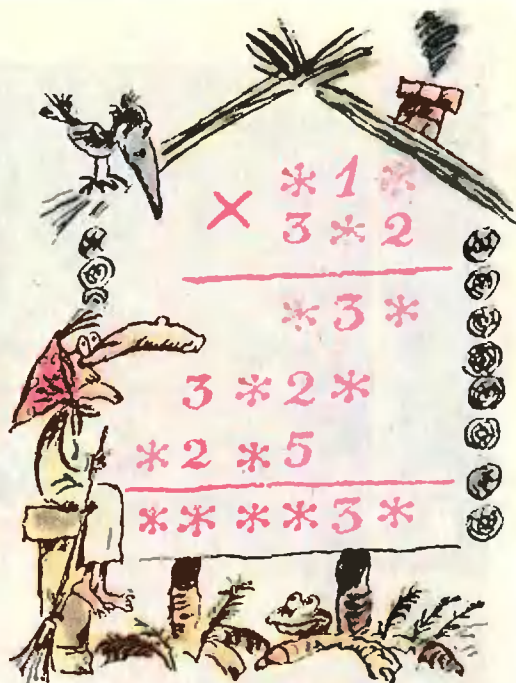
4. Сумма цифр трехзначного числа, все цифры которого различны, кратна 7; само число также делится на 7. Найдите все такие числа.

5. Дан угол величиной 54° . Пользуясь только циркулем, разделите его на три равные части (то есть найдите точки так, чтобы лучи, проходящие через вершину данного угла и эти точки, разделили его на три равные части).

6. Две окружности, длина каждой из которых равна 0,5 м, касаются стороны BC прямоугольника $ABCD$ ($|AB|=1$ м, $|BC|=2$ м) в одной и той же точке: одна с внешней стороны, другая — изнутри (см. рисунок). Окружности начинают перекатываться по сторонам прямоугольника (находясь в одной с ним плоскости). Сколько оборотов сделает каждая из окружностей к моменту возвращения в исходное положение?

7. По окружности расположены семь монет, лежащих вверх «решкой». Одним ходом разрешается перевернуть любые пять подряд лежащих монет. Можно ли добиться того, чтобы все монеты лежали вверх «орлом»?

Эти задачи нам предложили
Ф. Баргенов, А. Кабризон, Ю. Метт,
А. Швецов, Л. Яковлева





Ф. Бартеев, И. Никольская

О пользе нелепостей

Как-то раз мама с Катей ушли в гости, а Петя, предвкушая приятный вечер, полез на верхнюю полку за томиком увлекательнейших историй о Шерлоке Холмсе. Доставая книгу, он нечаянно смахнул с полки вазочку, которая разбилась вдребезги. Хорошее настроение Петю было несколько омрачено, но, решив не расстраиваться заранее, он смело черенки в угол и уютно устроился с книгой на диване. Рядом примостился Дружок. Едва раскрыв книгу, Петя тотчас же позабыл обо всем на свете и с головой погрузился в мир загадочных преступлений, которые так ловко распутывал Шерлок Холмс с помощью своего дедуктивного метода. К действительности его вернул возмущенный возглас Кати:

— Мама, смотри, Петяшка разбил вазочку, которую я тебе подарила!

— А ты видела? — по привычке запротестовал Петя. — Докажи, что это я!

— Что же тут доказывать? — пожала плечами Катя. — Дома были только ты и Дружок. Допустим, что не ты разбил вазочку; значит, ее разбил Дружок. Но не станешь же ты утверждать, что Дружок смог добраться до верхней полки. Это было бы нелепо: Дружок все-таки собака, а не кошка. Значит, вазочку разбил ты, больше никому.

— Да, — подумал Петя, — с ней не поспоришь, логика — как у Шерлока Холмса; да и спорить нечего — вазочку действительно разбил я. Пойду-ка к Мите, спрошу, что задано по математике.

У Мити он узнал, что по геометрии им задали теорему *Две прямые имеют не более одной общей точки*, доказательство которой Митя уже разобрал и выучил.

— Расскажи, — попросил Петя (чтение учебника геометрии, которую они только начали изучать, казалось ему делом трудным и скучным).

— Пожалуйста, — согласился Митя. — Допустим, что утверждение теоремы неверно; тогда...

— Поймай, поймай, — прервал его Петя, — дальше я сам расскажу. Если неверно, что две прямые имеют не более одной общей точки, значит они имеют более одной общей точки, то есть две или три, а может, и больше. Но тогда получится, что две точки соединяют две прямые. А этого не может быть — мы уже знаем, что через две точки проходит одна-единственная прямая. Значит, две прямые не могут иметь более одной общей точки, то есть общих точек у них не более одной.

— Ну, ты молодец, — удивился Митя. — Где это ты так насобачился?

— Именно насобачился, — засмеялся Петя. — Только что Катька таким же способом доказала, что вазочку разбил я, а не собака.

— Каким это способом? — заинтересовался Митя. — В чем он состоит? И вообще, что общего между доказательством геометрической теоремы и следствием по делу о разбитой вазочке?

Петя немного растерялся, но только на секунду. Воодушевленный успехом и похвалой друга, он стал думать вслух:

— В обоих случаях доказывалось некоторое утверждение P (в первом случае — *Вазочку разбил Петя*, во втором — *Две прямые имеют не более одной общей точки*);

— доказательство начиналось с того, что допускалась истинность *не P* (отрицания предложения P);

— допущение истинности *не P* в обоих случаях привело к нелепости (в первом — к тому, что собака может вскарабкаться на верхнюю полку, а это противоречит нашим представлениям о способностях и привычках собак; во втором — к тому, что через две точки можно провести две прямые, а это противоречит известной аксиоме).

— Ну и что? — спросил Митя. — Почему же этим доказано P ?

— А вот почему: раз допущение, что *не P* истинно, привело к нелепости, значит, *не P* истинным быть не может. Но если *не P* ложно, то P истинно!

— Все правильно, — сказал Митя. — Если отрицание предложения P ложно, то само предложение P ис-

тинно; помнишь, мы с тобой об этом говорили?*)). Поэтому вместо того, чтобы доказывать истинность P , можно доказывать ложность *не P* , а уж отсюда делать вывод об истинности P .

— Можно-то можно, — заметил Петя, — да нужно ли? Не проще ли идти прямым путем? Вот так, например, как мы с Катей в контрольной по алгебре доказывали, что число 13 не является корнем уравнения $x^3 - 17x^2 + 119x - 1000 = 0$: подсчитали значение выражения в левой части уравнения при $x = 13$ и убедились, что оно не равно 0.

— И не лень вам было умножать и складывать? — усмехнулся Митя. — Ведь стоило только предположить, что 13 — корень этого уравнения, как сразу получился бы нелепый вывод: 1000 делится на 13 ($13^3 - 17 \cdot 13^2 + 119 \cdot 13 = 1000$). Следовательно, 13 — не корень данного уравнения.

— И что же, — осведомился Петя, — такой путь доказательства всегда короче прямого?

— Нет, не всегда, — ответил Митя, — но довольно часто. Попробуй, докажи, например, что в Москве есть люди с одинаковым количеством волос на голове (лысые не считаются). Не станешь же ты у всех подряд перебирать шевелюру по волоску. А вот если предположить, что таких людей нет, то, приняв во внимание, что в Москве живет около 8 миллионов, а число волос на голове у человека не превосходит 500 000, мы приходим к нелепому выводу: $500\,000 \geq 8 \cdot 10^6$. Следовательно, в Москве есть жители с одинаковым числом волос на голове.

Доказательство утверждения P путем доказательства ложности его отрицания *не P* называется *косвенным доказательством*; называют его также *доказательством от противного*. А теперь попробуй, докажи от противного, что не существует наибольшего четного числа.

*) См. статью «Неверно, что... — как это понимать?» («Квант», 1980, № 9).



— Ну, что ж, — сказал Петя, — это нетрудно. Допустим, что такое число n существует. Тогда всякое другое четное число должно быть меньше n . Однако, прибавив к числу n двойку, получим четное число $n+2$, большее, чем n . Полученное противоречие доказывает, что предположение о существовании наибольшего четного числа ложно; значит, наибольшего четного числа не существует.

— Знаешь, — сказал Митя, — еще в третьем веке до нашей эры Евклид доказал, что наибольшего простого числа не существует. Предположив, что такое число p_n существует, он построил число $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$, где p_1, p_2, \dots — простые числа, предшествующие p_n ; p не делится ни на одно из чисел p_1, p_2, \dots, p_n (в остатке всегда будет 1), а значит, либо оно само — простое, либо делится на простое число q , большее, чем p_n . Полученное противоречие (p_n — наибольшее простое число и, одновременно, либо p , либо q — простое число, большее p_n) доказывает ложность сделанного допущения и, тем самым, истинность утверждения *Наибольшего простого числа не существует*.

— Бывает так, — продолжал Митя, — что ложность *не Р* столь очевидна, что можно сразу сделать вывод об истинности *Р*. Помнишь, в четвертом классе нам говорили, что пустое множество является подмножеством любого множества? Это звучало как-то странно, неубедительно. Попробуем доказать это утверждение от противного. Вспомним, что множество M называется подмножеством множества N , если всякий элемент множества M принадлежит множеству N . Допустим, что пустое множество M не есть подмножество множества N , то есть найдется такой элемент множества M , который не принадлежит N . Но это — очевидная нелепость, так как в пустом множестве согласно его определению вообще нет никаких элементов. Следовательно, пустое множество есть подмножество множества N .

— И в самом деле убедительно, — согласился Петя.

Друзья расстались, весьма довольные друг другом.

Вскоре на уроке физики учитель рассказал ребятам, как Галилей логически доказал свою гипотезу о том, что в пустоте все тела падают одинаково быстро, и опроверг тем самым гипотезу Аристотеля, полагавшего, что тело падает тем быстрее, чем оно тяжелее.

— Допустим, — сказал Галилей, — что тяжелое ядро падает быстрее, чем легкое. Что будет, если связать эти два ядра вместе? С одной стороны — легкое ядро должно замедлять падение тяжелого, с другой же — скорость падения связанных ядер должна быть больше скорости падения тяжелого ядра. Полученное противоречие доказывает, что предположение о различии скоростей падения тяжелого и легкого ядер ложно. Следовательно, ядра должны падать с одинаковой скоростью.

— Значит, приведение к противоречию бывает полезно и в физике, — отметил про себя Петя.

Спустя некоторое время учительница русского языка попросила Петю доказать, что в предложении *Почти все пионеры нашего класса увле-*

каются спортом слово почти — частица.

— Вот те на, — подумал Петя. — Я понимаю, *же* — частица, *ли* — частица, *бы* — частица, а *почти* — какая же это частица? Слово как слово. Впрочем, это, несомненно, служебная часть речи, то есть либо предлог, либо союз, либо междометие, либо частица. Допустим, что слово *почти* — не частица; тогда оно — предлог, или союз, или междометие. Но это слово не служит для связи слов или частей предложения; значит, оно — не предлог и не союз. Неверно и то, что слово *почти* — междометие: оно не выражает никаких чувств и не побуждает к действию. Следовательно, слово *почти* — частица, и я доказал это, рассуждая от противного. Учительница похвалила Петю за толковый ответ.

Прошло много времени. Петя и Митя окончили шестой класс и перешли в седьмой. На одном из первых уроков геометрии в седьмом классе разбиралась теорема: *Если две прямые перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.* Доказывалась эта теорема так: Предположим, что прямые a и b , перпендикулярные прямой p , пересекаются в точке M . Тогда через точку M проходят два перпендикуляра к прямой p , что противоречит теореме «Через любую точку проходит один и только один перпендикуляр к данной прямой». Учительница сказала, что это — доказательство от противного.

— Ага, — подумал Петя, вспомнив прошлогоднюю беседу с Митей, — эта теорема сформулирована в виде условного предложения: *Если A , то B* , а отрицанием такого предложения является предложение *A и (не B)*, то есть *Прямые a и b перпендикулярны прямой p и пересекаются.* Мы доказали, что утверждение *A и (не B)* ложно, так как противоречит ранее доказанной теореме. Значит, *Если A , то B* истинно. Все правильно.

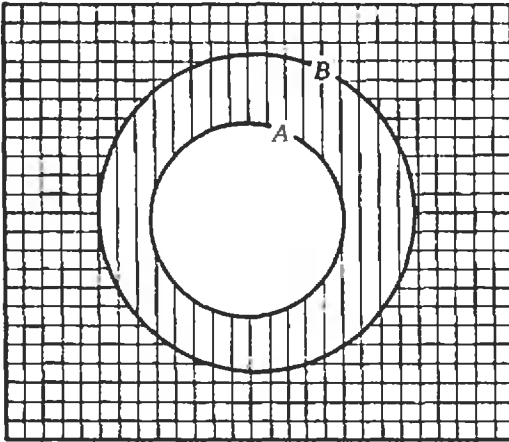
На уроке алгебры нужно было доказать утверждение: *Если натуральное число n меньше 1, то $\frac{1}{n} > n$.*



Учительница назвала доказательством от противного такое рассуждение: допустим, что $\frac{1}{n} < n$; тогда $\frac{1}{n} - n < 0$; отсюда следует, что $\frac{1-n^2}{n} < 0$, откуда $1-n^2 < 0$, $1 < n^2$ и $n > 1$. Пете показалось, что это не совсем то, что он привык считать доказательством от противного, и он решил обсудить этот вопрос с Митей. Тот рассеял его сомнения.

— Посмотри, — сказал он, — мы предположили, что истинно отрицание исходного утверждения *Натуральное число n меньше 1 и $\frac{1}{n} < n$.*

Из этого предложения вытекает опровергающее его противоречие: $n < 1$ и $n > 1$ одновременно. Следовательно, исходное предложение истинно. Как видишь, это самое настоящее доказательство от противного. Но к этому вопросу можно подойти и иначе. Мы недавно проходили тему «Равносильные предложения». Так вот, предложения *Если A , то B* и *Если (не B), то (не A)* равносильны, то есть при любых A и B они либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Значит,



вместо того, чтобы доказывать утверждение *Если A, то B*, можно доказать утверждение *Если (не B), то (не A)*. Так мы, в сущности, и поступили, решая эту задачу. Понять, почему такая равносильность имеет место, тебе поможет рисунок, из которого видно, что если из *A* следует *B* (множество истинности предложения *A* есть подмножество множества истинности предложения *B*), то из *не B* следует *не A* (множество истинности предложения *не B* есть подмножество множества истинности предложения *не A*). Верно и обратное. Равносильность предложений *Если A, то B* и *Если (не B), то (не A)* называется в логике *законом контрапозиции*.

Итак, что мы теперь знаем о косвенных доказательствах? Доказательство утверждения *P* от противного состоит, вообще говоря, в доказательстве ложности *не P*. Ложность предложения *не P* доказана, если из него выведено ложное следствие *Q*. Предложение *Q* ложно, если оно является отрицанием предложения, истинность которого ранее установлена, либо если оно само имеет форму противоречия *R* и *(не R)*.

Отрицанием условного предложения *Если A, то B* является *A* и *(не B)*. Доказать ложность предложения *A* и *(не B)* можно еще и так: вывести из него следствие *не A* (противоречащее *A*), либо *B* (противоречащее *не B*).

Согласно закону контрапозиции, предложение *Если A, то B* будет доказано и в том случае, если удастся доказать предложение *Если (не B), то (не A)*.

Добавим к этому, что в основе всех форм доказательства от противного лежит закон *исключенного третьего*. Этот логический закон утверждает, что из двух высказываний *P* и *не P* всегда либо первое истинно, а второе ложно, либо, наоборот, первое ложно, а второе истинно; никакой третьей возможности нет. Именно на основании этого закона мы из ложности *не P* делаем вывод об истинности *P*.

Как видите, в математике на каждом шагу используются законы логики, а, как сказано в книге А. Ренья и «Трилогия о математике» (советуем прочесть!)*, — «Тот, кто постиг искусство логического мышления в математике, может использовать его в любой области жизни». Так давайте поупражняйтесь в этом искусстве и решите несколько задач.

1. Докажите, что не существует треугольника *a*) с углами 40° , 60° , 70° ; б) со сторонами длины 7 см, 10 см, 18 см.

2. Докажите, что при любом натуральном *m* равенство $m(m+1) = 27 \cdot 381$ неверно.

3. Докажите, что не существует такого числа, которое при делении на 21 дает в остатке 1, а при делении на 14 дает в остатке 3.

4. Для натуральных *m* и *n* докажите следующие утверждения: а) если m^2 четно, то *m* четно; б) если *m* четно и *n* нечетно, то произведение *mn* нечетно.

5. Точки *A*, *B* и *C* лежат на одной прямой, $|AB| = 5$ см, $|AC| = 7$ см. Лежит ли точка *C* между точками *A* и *B*? Ответ обоснуйте.

6. Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую. Докажите.

7. Если функция *f* — возрастающая, то из $f(x_2) > f(x_1)$ следует $x_2 > x_1$. Докажите.

8. Является ли в предложении *Люблю грозу в начале мая* слово *грозу* подлежащим? Правильность ответа докажете от противного.

9. Сережа надумал соорудить во дворе несочиницу для малышей и стал искать подходящие доски. Ему удалось найти четыре доски длиной по 1 м, две доски по 2 м, и одну доску длиной в 3 м. Можно ли всеми этими досками, не распиливая их, огородить прямоугольную несочиницу?

10. Можно ли разменять 20 копеек семью монетами достоинством 1, 3 и 5 копеек?

* М., «Мир», 1980.

О. Овчинников

Что же покажет динамометр?

На гладкой горизонтальной поверхности лежит динамометр. К одному концу динамометра прикладывают силу $F_1 = 5\text{Н}$, к другому — силу $F_2 = 8\text{Н}$ (рис. 1). Что покажет динамометр?

Задачи подобного содержания можно встретить в задачниках и учебных пособиях по физике. Ответ, как правило, приводится такой: динамометр будет показывать 5Н. Подтвердить это можно следующим рассуждением. Если к обоим концам динамометра прикладывают силы, равные 5Н, то динамометр показывает 5Н. Если же одну из сил увеличить на 3Н, то равновесие нарушится, и динамометр, показывая 5Н, начнет двигаться в направлении действия большей силы с ускорением $a = (F_2 - F_1)/m$, где m — масса динамометра.

Казалось бы, все очевидно. Однако...

Давайте разберемся в этом вопросе детально. Начнем с такой простой задачи:

на гладком горизонтальном столе лежит пружина с жесткостью k . К одному из концов пружины прикладывают силу F_0 , направленную



Рис. 1.

горизонтально (рис. 2). На сколько удлинится пружина?

Найдем силу упругости F_x , которая возникает в сечении, находящемся на расстоянии x от конца нерастянутой пружины. Поскольку пружина однородна, масса участка пружины длиной x равна

$$m_x = \frac{m_0}{l_0} x,$$

где m_0 — масса пружины, l_0 — длина пружины в нерастянутом состоянии. Ускорение, с которым будет двигаться вся пружина под действием силы F_0 , равно

$$a = \frac{F_0}{m_0}.$$

С таким же ускорением будет двигаться рассматриваемый нами участок пружины длиной x . На этот участок со стороны остальной части пружины действует сила, равная силе упругости F_x , возникающей в сечении на расстоянии x от свободного конца пружины. Следовательно, значение силы упругости F_x равно

$$F_x = m_x a = \frac{F_0 x}{l_0}.$$

Мы получили интересный результат. Во-первых, сила упругости, возникающая в данном сечении пружины, пропорциональна его координате при нерастянутой пружине, или длине участка, отсекаемого этим сечением. Во-вторых, значение этой силы не зависит от массы пружины. Масса пружины может принимать любые значения, отличные от нуля. В случае $m_0 = 0$ ускорение, приобретаемое пружиной, обращается в бесконечность.

Возникающая вследствие удлинения пружины сила упругости пропорциональна этому удлинению: $F = k\Delta l$, где k — жесткость пружины. Однако рассчитывать показания динамометра по этой формуле можно лишь тогда, когда в любом сечении пружины

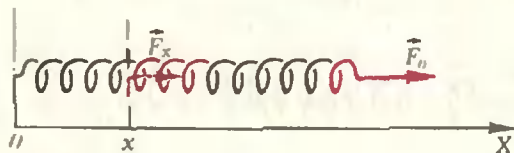


Рис. 2.



Рис. 3.

возникает одна и та же сила упругости. Именно такая ситуация осуществляется в том случае, когда на оба конца пружины действуют одинаковые по абсолютной величине силы (например, когда к одному концу пружины приложена сила F , а другой конец закреплен).

В нашем случае при ускоренном движении пружины силы упругости, возникающие в различных сечениях пружины, различны. Это означает, что удлинения отдельных участков пружины, вследствие которых и возникают соответствующие силы упругости, различны.

Для расчета удлинения всей пружины воспользуемся следующими рассуждениями. Мысленно разделим нерастянутую пружину на N одинаковых частей. Рассмотрим кусочек пружины, отделенный от свободного ее конца i кусочками (рис. 3). Сила T_i , с которой выделенный участок пружины действует на эти i кусочков с массой $\frac{m_0}{N} i$, сообщает им ускорение $a = F_0/m_0$; следовательно,

$$T_i = \frac{i}{N} m_0 a = \frac{i}{N} F_0.$$

Такая же по абсолютной величине сила действует на выделенный участок пружины. Пусть справа на этот участок действует сила T_{i+1} . Тогда

$$T_{i+1} - T_i = m_i a = \frac{F_0}{N}.$$

С ростом N величина F_0/N уменьшается, и при достаточно больших N можно считать, что $T_{i+1} - T_i \approx 0$, то есть $T_{i+1} \approx T_i = \frac{i}{N} F_0$. Иными словами, при большом N можно счи-

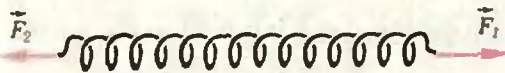


Рис. 4.

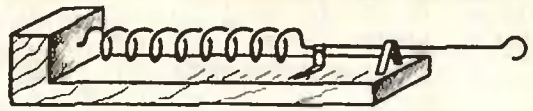


Рис. 5.

тать, что сила упругости, возникающая в различных сечениях внутри отдельного участка пружины, постоянна. Жесткость же каждого такого участка, как известно, равна kN . Следовательно, $T_i = kN \cdot \Delta l_i$, и удлинение отдельного участка пружины равно

$$\Delta l_i = \frac{T_i}{kN} = \frac{i}{kN^2} F_0.$$

Чтобы найти удлинение всей пружины, нам надо просуммировать удлинения отдельных участков:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \sum_{i=1}^N \Delta l_i = \frac{F_0}{kN^2} \sum_{i=1}^N i = \\ &= \frac{F_0}{kN^2} \frac{N(N-1)}{2} = \frac{F_0}{2k} \end{aligned}$$

(мы помним, что $N \gg 1$).

Итак, один шаг на пути решения нашей проблемы — что покажет динамометр, если к пружине и корпусу его приложить различные силы, — мы сделали. Теперь — следующий шаг. Рассмотрим такую задачу: к концам пружины с жесткостью k , лежащей на гладком горизонтальном столе, приложены силы F_1 и F_2 (рис. 4), причем $F_1 > F_2$. На сколько удлинится пружина?

Рассуждая точно так же, как в предыдущей задаче, мы найдем, что сила упругости, возникающая в отдельном малом участке пружины, равна

$$T_i = \frac{F_1 - F_2}{N} i + F_2 = kN \cdot \Delta l_i.$$

Удлинение такого участка равно

$$\Delta l_i = \frac{(F_1 - F_2)i + F_2 N}{kN^2}.$$

Следовательно, удлинение всей пружины равно

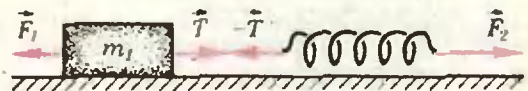


Рис. 6.

жины равно

$$\Delta l = \sum_{i=1}^N \Delta l_i = \frac{1}{kN^2} \sum_{i=1}^N (F_1 - F_2) i + F_2 N = \\ = \frac{F_2}{kN} + \frac{F_1 - F_2}{kN^2} \sum_{i=1}^N i = \frac{F_1 - F_2}{2k}$$

(поскольку по-прежнему N очень велико).

Теперь мы перейдем от простой пружины к динамометру. Вспомним, что представляет собой простой школьный динамометр. Это стальная пружина с крючком, прикрепленная к корпусу с нанесенной на него шкалой (рис. 5). Так что условие нашей самой первой задачи можно сформулировать так:

на гладкой горизонтальной поверхности лежит динамометр. К корпусу его прикладывают силу F_1 , а к пружине (к крючку) — силу F_2 . Что покажет динамометр?

Чтобы предсказать показания динамометра, представим его в виде такой системы, как на рисунке 6. Кубик слева — это корпус динамометра; его масса m_1 . Пружина справа — это пружина динамометра; ее масса m_2 . Запишем уравнения движения корпуса и пружины:

$$T - F_1 = m_1 a, \\ F_2 - T = m_2 a,$$

где a — ускорение, с которым движется динамометр.

Из этих уравнений находим

$$T = F_2 - \frac{(F_2 - F_1)m_2}{m_1 + m_2}.$$

На пружину динамометра действуют две силы — F_2 и T , причем $T < F_2$. А удлинение пружины в таком случае, как мы выяснили, равно $\Delta l = \frac{T + F_2}{2k}$. Подставив найденное значение T , получим

$$\Delta l = \frac{F_2}{k} - \frac{(F_2 - F_1)m_2}{2k(m_1 + m_2)}.$$

Из этого выражения видно, что при $m_2 = 0$ (то есть в том случае, когда массой пружины можно пренебречь) удлинение пружины равно $\Delta l = F_2/k$.

Итак, результат наших рассуждений следующий: удлинение пружины, а следовательно, и показания динамометра зависят не только от величин сил, действующих на корпус и пружину, но и от массы корпуса и пружины динамометра. Мало этого. Показание зависит и от того, к чему (к корпусу или к пружине) приложены силы F_1 и F_2 . Если поменять в рассмотренной нами задаче силы F_1 и F_2 местами, показание изменится. (Проверьте сами, что это действительно так.)

Мы приходим к выводу, что задача, сформулированная в начале статьи, не может быть решена строго до тех пор, пока не будут заданы массы корпуса и пружины динамометра. И ответ, приведенный нами в самом начале, не верен. Чтобы еще раз убедиться в этом, решите задачу, воспользовавшись реальными данными, характерными для знакомого вам школьного динамометра.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см на с 35)

(Кировакан) 27; А Мельник (Житомир) 27; Е Мельничук (Черновцы) 25, 27; О Меркулов (Муром) 25; С Милованов (Запорожье) 23, 25, 27; А Митько (Гомель) 31; С Михайловский (с Кошцегорье Архангельской обл.) 19, 23, 28; М Мочульский (Запорожье) 18, 21; П Муталиев (Джизак) 25; М Найговзин (Баку) 18, 19, 23, 27, 28, 31; А Найден (Берлин, ГДР) 23; А Николаев (Чебоксары) 25; А Нозин (Минск) 18, 21, 23; С Обогуев (Ленинград) 25, 27, 31; А Осипов (Сосновый Бор) 25, 29, 31, 32; И Осояк (с В Дедеркалы Тернопольской обл.) 23; Ю Остапчук (Здолбунов) 31; Ю Павлов (Ленинград) 18, 23, 27; А Павлычев (Рига) 19, 25, 27, 28,

31; Д Пастухов (Челябинск) 18; С Пащенко (Киев) 18, 19, 21, 23, 25, 27, 28; А Пелех (Казатин) 18, 21, 23, 25, 27, 28; В Пентегов (Киев) 19—23, 28, 31; В Петров (Свердловск) 27; И Пиковский (Киев) 19, 21; С Пишенин (Черновцы) 28, 31; С Погорелов (Киев) 27; Г Поде (Ворошиловград) 27; Г Подчурский (Бельцы) 31; А Полисский (Киев) 18, 21; Е Поляков (Калининград Московской обл.) 18; А Пономаренко (Киев) 18, 21, 23; А Посметюко (Минск) 25; В Потялицын (п/о Савинское Архангельской обл.) 25, 27; О Потялицына (Жуковский) 25, 27; В Прилипко (Киев) 28; К Протасов (Москва) 27; О Райчев (Киев) 23, 25, 27; И Решетов (Мелитополь) 27; Г Розикян (Ереван) 23; Е Розман (Киев) 25, 31; Н Салахов (Ташкент) 18; А Салтанов (Новополоцк) 18, 25, 31; Ю Самохин (Москва) 25, 27;

(Окончание см на с 50)



В. Можжев

Колебания

С колебаниями мы сталкиваемся повсюду. Это, например, колебания различных маятников и струн музыкальных инструментов, молекул газа в звуковой волне и молекул жидкости в морских волнах. Колебательные движения совершают атомы в твердых телах и электроны, входящие в состав атомов. Колебания электрического заряда и тока происходят в контурах радиоприемников и телевизоров. По таким же законам происходят изменения напряженности электрического поля и индукции магнитного поля в электромагнитной волне.

Самое удивительное, что все эти совершенно различные физические явления описываются одними и теми же математическими уравнениями, то есть подчиняются единым законам. Именно с такой позиции мы и рассмотрим ряд примеров простейших колебательных систем. Ограничимся рассмотрением только свободных колебаний, когда внешние воз-

действия на колебательную систему отсутствуют, параметры системы и условия, в которых совершаются колебания, со временем не изменяются. Потерями энергии в колебательной системе будем пренебрегать, то есть будем полагать, что полная энергия системы остается постоянной. Это, конечно, идеализация, но, если потери энергии существенно меньше полной энергии системы, колебания реальной системы в течение достаточно длительного времени будут мало отличаться от колебаний идеализированной системы.

Задача 1. Груз массой m , находящийся на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплен к неподвижной стенке с помощью пружины жесткостью k (рис. 1, а). Груз смещают от положения равновесия OO' на величину A_0 и отпускают без начальной скорости. Найдите: 1) смещение груза от положения равновесия в зависимости от времени; 2) временную зависимость скорости груза; 3) зависимость от времени кинетической энергии груза и потенциальной энергии пружины; 4) среднюю (за период) кинетическую и среднюю потенциальную энергию данной системы.

1) Пусть в некоторый произвольный момент времени t груз находится в точке с координатой x (рис. 1, б). Запишем уравнение движения груза вдоль оси X . В этом направлении на груз действует только одна сила — сила упругости пружины \vec{F} , направленная к положению равновесия ($x=0$). Проекция этой силы $F = -kx$, поэтому уравнение движения будет иметь вид

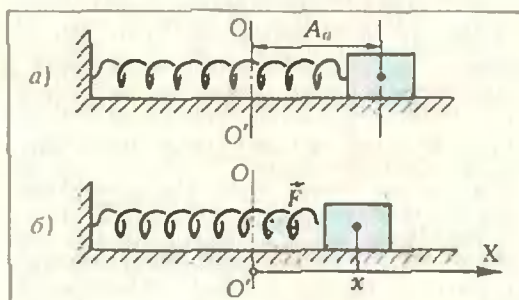


Рис. 1.

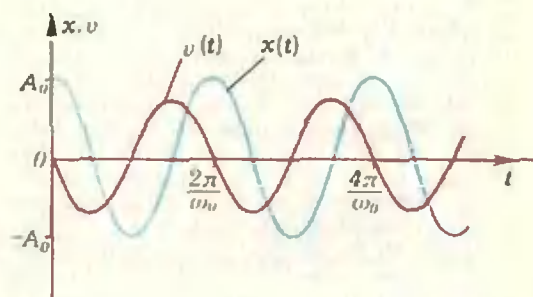


Рис. 2.

$$ma = -kx, \quad (1)$$

где a — проекция ускорения груза в данный момент времени. Учитывая, что ускорение — это вторая производная координаты по времени ($a = x''$), перепишем уравнение (1) так:

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0,$$

или, обозначив постоянный коэффициент $\frac{k}{m}$ через ω_0^2 , —

$$x'' + \omega_0^2 x = 0. \quad (2)$$

Полученное уравнение описывает гармонические колебания груза, то есть колебания, при которых смещение груза от положения равновесия изменяется со временем по закону

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (3)$$

Выражение (3) является решением уравнения (2). Здесь x_m — амплитуда, ω — круговая частота, $(\omega t + \varphi_0)$ — фаза и φ_0 — начальная фаза колебаний.

Чтобы найти круговую частоту, подставим решение (3) в уравнение (2):

$$-x_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 x_m \cos(\omega t + \varphi_0) = 0,$$

или

$$x_m \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) = 0.$$

Это равенство справедливо для любого момента времени t , если $x_m = 0$ либо $\omega_0^2 - \omega^2 = 0$. Поскольку амплитуда колебаний не может быть равна нулю, остается

$$\omega_0^2 - \omega^2 = 0, \text{ или } \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Мы получили очень важный результат: коэффициент при x в уравнении (2) есть не что иное, как квадрат круговой частоты колебаний.

Теперь найдем амплитуду колебаний и начальную фазу. Для этого используем начальные условия: в момент времени $t=0$ смещение $x=A_0$ и скорость, которая является первой производной координаты по времени, $v=x'=0$. Из второго условия получим, что $\varphi_0=0$, а из первого — что $x_m=A_0$.

Таким образом, смещение груза со временем изменяется по закону

$$x = A_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

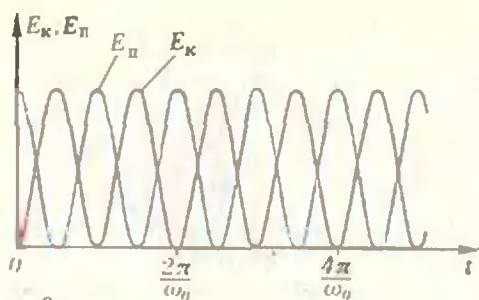


Рис. 3.

2) Скорость (точнее, ее проекция) является первой производной координаты по времени, поэтому зависимость скорости от времени будет такой:

$$v = -A_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

Графики $x=x(t)$ и $v=v(t)$ показаны на рисунке 2.

3) Кинетическая энергия груза в произвольный момент времени t равна

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{A_0^2 k}{2} \sin^2 \sqrt{\frac{k}{m}} t,$$

а потенциальная энергия пружины —

$$E_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{A_0^2 k}{2} \cos^2 \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

На рисунке 3 изображены соответствующие графики.

4) Средние (за период) значения кинетической и потенциальной энергии равны соответственно

$$\bar{E}_k = \frac{A_0^2 k}{2} \sin^2 \sqrt{\frac{k}{m}} t = \frac{A_0^2 k}{4}$$

и

$$\bar{E}_n = \frac{A_0^2 k}{2} \cos^2 \sqrt{\frac{k}{m}} t = \frac{A_0^2 k}{4}$$

— средние значения E_k и E_n одинаковы. (Здесь было использовано то, что среднее за период значение квадрата синуса равно среднему значению квадрата косинуса и равно $1/2$.)

Задача 2. Тонкий обруч радиусом r катается без скольжения по внутренней поверхности цилиндра радиусом R , совершая малые колебания около положения равновесия (рис. 4). Найдите период этих колебаний.

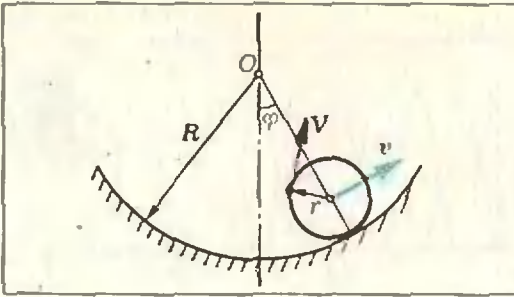


Рис. 4.

Из решения предыдущей задачи ясно, что для нахождения частоты ω колебательной системы или периода T ($T=2\pi/\omega$) достаточно составить уравнение движения и привести его к виду (2). Тогда коэффициент при втором члене даст квадрат частоты.

Понятно, что в уравнении (2) роль смещения x может играть любая другая физическая величина. Выберем в качестве таковой угол φ , который прямая, соединяющая центр масс обруча и точку O , образует с вертикалью.

Для составления уравнения движения центра масс обруча воспользуемся энергетическими соображениями. В некоторый произвольный момент времени t обруч обладает кинетической энергией $E_{к1}$, связанной с движением центра масс по окружности радиусом $R-r$, кинетической энергией $E_{к2}$ вращательного движения относительно центра масс и потенциальной энергией $E_{п}$ в поле тяжести Земли. Пусть скорость центра масс обруча равна v ; тогда кинетическая энергия $E_{к1} = mv^2/2$ (m — масса обруча). Поскольку обруч тонкий, то есть вся его масса сосредоточена в тонком кольце, кинетическая энергия $E_{к2} = mV^2/2$, где V — линейная скорость вращательного движения обруча. При качении без проскальзывания $V=v$, поэтому

$$E_{к2} = \frac{mv^2}{2} = E_{к1}.$$

За нулевой уровень потенциальной энергии выберем уровень центра масс обруча в положении устойчивого равновесия, тогда потенциальная энергия обруча в данный момент времени будет равна

$$E_{п} = mg((R-r) - (R-r)\cos\varphi) = mg(R-r)(1 - \cos\varphi) = \frac{mg(R-r)\varphi^2}{2}$$

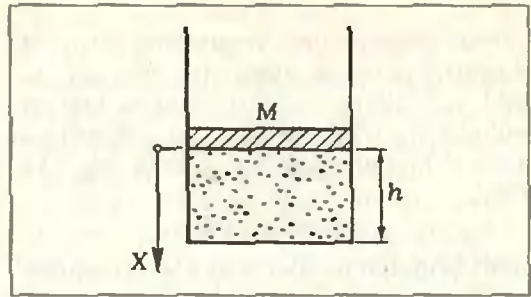


Рис. 5.

(последнее приближенное равенство записано с учетом малости угла φ : $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\varphi/2 = \varphi^2/2$).

Полная энергия обруча

$$E_{к1} + E_{к2} + E_{п} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{mg(R-r)\varphi^2}{2} = mv^2 + \frac{mg(R-r)\varphi^2}{2}$$

остается постоянной во времени. Учитывая связь между скоростью v и угловой скоростью движения центра масс по окружности радиусом $R-r$: $v = (R-r)\omega = (R-r)\varphi'$ (угловая скорость есть первая производная угла по времени), окончательно получим

$$m(R-r)^2(\varphi')^2 + \frac{mg(R-r)\varphi^2}{2} = \text{const.}$$

Продифференцируем обе части этого выражения по t :

$$2m(R-r)^2\varphi'\varphi'' + mg(R-r)\varphi\varphi' = 0,$$

или

$$\varphi' \left(\varphi'' + \frac{g}{2(R-r)} \varphi \right) = 0.$$

Поскольку угловая скорость φ' не равна нулю, справедливо равенство

$$\varphi'' + \frac{g}{2(R-r)} \varphi = 0.$$

Это и есть уравнение движения обруча. Следовательно, круговая частота

$\omega = \sqrt{\frac{g}{2(R-r)}}$, а период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}.$$

Задача 3. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде с площадью сечения S может перемещаться без трения массивный поршень массой M (рис. 5). Сосуд заполнен газом. В положении равновесия расстояние между поршнем и дном сосуда равно h . Определите период малых колебаний, которые возникают при отклонении поршня

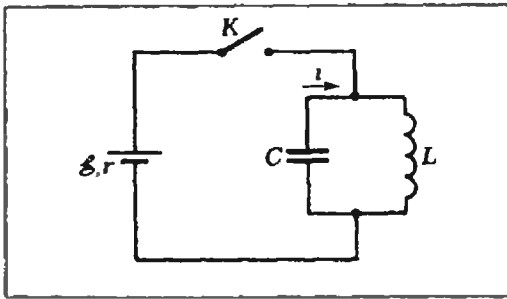


Рис. 6.

из положения равновесия. Атмосферное давление равно p_0 , газ идеальный, температура газа постоянна.

Пусть в некоторый момент времени поршень сместился вниз на малую величину x . Уменьшение объема газа под поршнем будет равно $\Delta V = Sx$, что вызовет увеличение давления газа Δp . Найдем связь между ΔV и Δp . Поскольку процесс изотермический, $pV = \text{const}$, а $\Delta(pV) = 0$. Следовательно, $V\Delta p + p\Delta V = 0$, или

$$\Delta p = -\frac{\Delta V}{V} p = -\frac{Sp}{V} x.$$

При малых колебаниях $\Delta V \ll V$ и $\Delta p \ll p$, поэтому

$$\Delta p = -\frac{(p_0 + Mg/S)}{h} x.$$

Запишем уравнение движения поршня:

$$Mx'' = \Delta p S,$$

или

$$x'' + \frac{p_0 S + Mg}{Mh} x = 0.$$

Отсюда найдем круговую частоту

$$\omega = \sqrt{\frac{p_0 S + Mg}{Mh}} \text{ и период колебаний}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{Mh}{p_0 S + Mg}}.$$

Задача 4. Колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L , подключен через ключ K к источнику с постоянной ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r (рис. 6). Ключ замыкают, а после того как в цепи установится стационарный режим, размыкают его. Найдите зависимость напряжения на конденсаторе от времени после размыкания ключа. Омическим сопротивлением катушки пренебречь.

При замкнутом ключе в стационарном режиме через катушку течет постоянный ток $I = \mathcal{E}/r$. Напряжение на конденсаторе и, следовательно, заряд на нем равны нулю, поскольку напряжение на конденсаторе равно напряжению на катушке, а оно, при отсутствии активного сопротивления катушки, равно нулю.

После размыкания ключа в контуре начнутся свободные колебания. Пусть в некоторый момент времени заряд на конденсаторе равен q , а напряжение на конденсаторе равно u . Очевидно, что при этом напряжение на катушке тоже равно u . Будем считать напряжение на конденсаторе положительным, когда верхняя пластина заряжена положительно; за положительное направление тока выберем направление, указанное стрелкой на рисунке 6. При таком выборе знаков связь между зарядом q , напряжением u и током i будет такой: $i = -q'$, $q = Cu$, $u = Li'$.

Отсюда $i = -Cu'$, $u = -LCu''$, или

$$u'' + \frac{1}{LC} u = 0.$$

Мы опять получили уравнение, которое описывает гармонические колебания. В данном случае по гармоническому закону изменяется со временем напряжение u на конденсаторе. Легко показать, что и ток i в цепи, и заряд q на конденсаторе изменяются по аналогичному закону. Убедитесь в этом самостоятельно.

В общем виде зависимость напряжения от времени выглядит так:

$$u = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Частота колебаний в данном случае равна

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Амплитуду и начальную фазу можно найти из начальных условий: в момент времени $t=0$ $u=0$ и $i = \mathcal{E}/r$. Нетрудно показать, что решение, удовлетворяющее таким начальным условиям, будет иметь вид

$$u = \frac{\mathcal{E}}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} \sin \sqrt{\frac{1}{LC}} t.$$

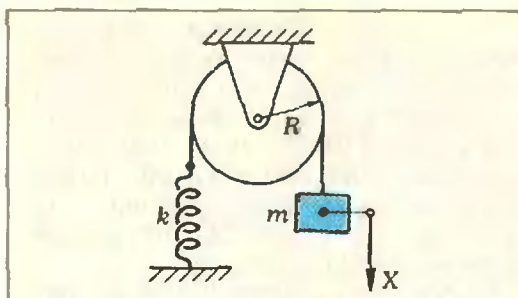


Рис. 7.

Упражнения

1. Твердый шарик, подвешенный на невесомой пружине, совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с периодом T_0 и амплитудой A . Каким станет период колебаний, если снизу к шарiku поднести массивную твердую горизонтальную плиту, с которой он будет периодически упруго сталкиваться? Расстояние от положения равновесия шарика до плиты равно $A/2$, масса шарика мала по сравнению с массой плиты.

2. Через неподвижный блок в виде диска с массой M и радиусом R переброшена шнур, на одном конце которой висит груз массой m , а другой конец через пружину с жесткостью k закреплен (рис. 7). Найдите период малых колебаний груза относительно положения равновесия. Шнур относительно блока не проскальзывает. Указание. Используйте энергетический метод составления уравнения движения. Кинетическая энергия диска,

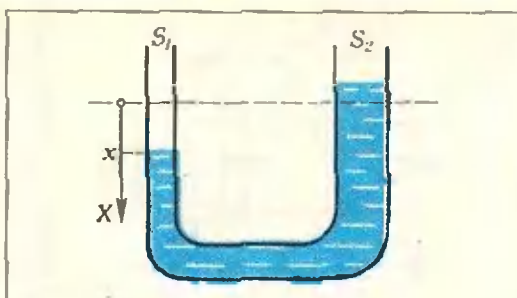


Рис. 8.

вращающегося с угловой скоростью ω относительно оси, проходящей через центр масс диска и перпендикулярной к плоскости диска, равна $MR^2\omega^2/4$.

3. В сообщающиеся сосуды с поперечными сечениями S_1 и S_2 (рис. 8) налита жидкость с плотностью ρ . Масса всей жидкости равна M . Пренебрегая поверхностным натяжением и вязкостью, определите период колебаний жидкости около положения равновесия.

4. В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивности и воздушного конденсатора, величина тока меняется со временем по гармоническому закону: $i = I_m \cos \omega t$. Когда ток в контуре оказывается равным нулю, в пространство между пластинами конденсатора быстро вводят диэлектрическую пластину с диэлектрической проницаемостью ϵ . Время этого внешнего воздействия мало по сравнению с периодом колебаний в контуре. Найдите зависимость тока в контуре от времени после внесения пластины.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см. на с. 35)

А. Санжур (Киев) 18—31; А. Сафонов (Барнаул) 18; С. Светлицкий (Запорожье) 19, 21; Ю. Свистунов (Запорожье) 25; В. Семенов (Владимир) 23; А. Середа (Донецк) 25, 27, 31; О. Середа (Бердянск) 19; В. Середа (Львов) 23, 27; А. Сидоренков (Смоленск) 19, 21, 27—29, 31; В. Сидорин (Реутов) 19, 31; В. Симонов (Москва) 18, 25, 27, 28; А. Скок (Талгар) 19, 21; О. Скопцов (Алгарск) 18, 19, 21; А. Смирнов (Курган) 21, 25, 27, 28, 31; И. Смолярченко (Минск) 23, 25, 28, 31; А. Сокол (п. Черногородка Московской обл.) 18, 25, 28, 29, 31; И. Соловей (Донецк) 25, 27; В. Соловьев (Рыбное) 23; С. Солоенко (Мелеуз) 19; Ю. Спиридонов (Загорск) 25, 27, 28, 31; Д. Степанов (Арзамас) 25, 29, 31; А. Стрелец (Киев) 18, 21; Д. Суворов (Свердловск) 28, 31; Т. Сурова (Ступино) 25, 27; Е. Сырычева (Вышний Волочек) 18, 25; И. Тивин (Ковров) 21, 25, 27; С. Таковицкий (Жуковский) 18; Ю. Талденко (Сумы) 18, 19, 23, 25, 27, 31; В. Танисийчук (Городенка) 23, 27; А. Терещенко (Киев) 25, 27—29; С. Тимофеев (Но-

воазовский р-н Донецкой обл.) 19; Ю. Топчиев (Светлый) 21; В. Фабер (Баку) 23, 25, 29, 31; Н. Федин (Омск) 18, 19, 20, 23, 25, 27, 31; В. Федюкович (Киев) 18, 20, 21, 27—29, 31, 32; С. Федяков (Ефремов) 28; Н. Фесун (Киев) 21, 25, 27; А. Флеров (Рига) 18, 19, 27; О. Фонарев (Сумгаит) 18, 25, 26; М. Фридман (Львов) 28, 31; А. Фролов (Тула) 20, 21, 28; С. Фролов (Москва) 25, 28, 29, 31; И. Хирин (Сухуми) 23, 25, 27; И. Хасанов (Коканд) 25, 31; С. Хосид (Алма-Ата) 23, 25; А. Цеханский (п. Запрудня Московской обл.) 18, 23, 25, 27—29, 31; Ю. Цыганков (Дрожжановский р-н ТАССР) 19—21, 27—29, 31, 32; О. Червяков (Архангельск) 27; Е. Чулкин (с. Рябово УдАССР) 18, 19, 25, 26, 28; А. Чулков (п. Мучкапский Тамбовской обл.) 18—21, 27, 28, 31, 32; В. Шаповал (Винница) 18, 19, 23, 25, 27, 28; Ю. Шаповалов (Серпухов) 18, 23, 25, 27; А. Шапоренко (Орск) 18, 19; С. Шармид (Новосибирск) 23; А. Шевченко (Артемовск Донецкой обл.) 19, 28, 29; М. Шевченко (Артемовск Донецкой обл.) 19, 28, 29; Б. Шерман (Ереван) 27; И. Шкридюк (Новинск) 18, 19, 21, 23, 31; С. Шмаков (Спратов) 23, 25, 27, 31; Ю. Шпагин (Шумерля) 18, 19, 23, 25, 27; И. Шувалова (Москва) 25, 27; О. Юсифов (Актафа) 19; В. Яковлев (Москва) 27, 31; К. Яковлев (Киев) 23, 25, 27, 28, 31, 32; С. Якуш (Краснодар) 23, 25; Л. Яцук (Ровно) 25.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Найти все значения x , удовлетворяющие условию

$$(x^2 - 4)\sqrt{x+1} = 0.$$

2. Найти все решения уравнения

$$\sin 2x = \sqrt{3} \sin x.$$

3. В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из оснований имеют величину 40° и 50° . Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований, равна 1.

4. Касательная к графику функции $\sqrt[3]{x^2}$ такова, что абсцисса c точки касания принадлежит отрезку $[\frac{1}{2}, 1]$. При каком значении c площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и вертикальной прямой $x=2$, будет наименьшей и чему равна эта наименьшая площадь?

5. Найти все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\log_4 (\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \cdot \log_5 (x^2 + ax + 6) + \log_a 3 > 0$$

имеет ровно одно решение.

Разбор задач варианта 1

1. Ответ. $\{-1, 2\}$.

Почти все абитуриенты успешно справились с этой задачей. Однако некоторые писали

$$(x^2 - 4)\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ \sqrt{x+1} = 0 \end{cases};$$

при этом, даже если в окончательный ответ значенне $x = -2$ не включалось, экзаменаторы не могли считать задачу решенной безупречно.

2. Ответ. $x_1 = \pi n, \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.

Указание. Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \sqrt{3}/2. \end{cases}$$

3. Ответ. 3 и 5.

Решение. Пусть KM — средняя линия трапеции $ABCD$, LN — отрезок, соединяющий середины оснований BC и AD , $\widehat{BAD} = 50^\circ$, $\widehat{CDA} = 40^\circ$. Отметим, что $|AD| > |BC|$, поскольку $\widehat{BAD} + \widehat{CDA} = 90^\circ < 180^\circ$ (рис. 1). Пусть Q — точка пересечения прямых AB и DC . Поскольку $CB \parallel AD$, треугольник AQD подобен треугольнику BQC . Поэтому

$$\frac{|BQ|}{|AQ|} = \frac{|BC|}{|AD|} = \frac{|BC|/2}{|AD|/2} = \frac{|BL|}{|AN|}.$$

Так как $\widehat{BQC} = \widehat{QAD}$ и $\frac{|BQ|}{|AQ|} = \frac{|BL|}{|AN|}$, треугольники QBL и QAN подобны. Поэтому $\widehat{BQL} = \widehat{QAN}$ и, следовательно, точки Q, L, N лежат на одной прямой. Треугольник AQD — прямоугольный, поскольку $\widehat{AQD} = 180^\circ - \widehat{QAD} - \widehat{QDA} = 90^\circ$. Поэтому N — центр описанной вокруг него окружности; значит,

$$|QN| = \frac{|AD|}{2}. \quad \text{Аналогично, } |QL| = \frac{|BC|}{2}.$$

Итак,

$$\frac{|AD|}{2} - \frac{|BC|}{2} = |QN| - |QL| = |LN| = 1.$$

По свойству средней линии трапеции $\frac{|AD| + |BC|}{2} = |KM| = 4$.

Из системы $\begin{cases} |AD| - |BC| = 2 \\ |AD| + |BC| = 8 \end{cases}$ находим $|AD| = 5, |BC| = 3$.

С этой задачей полностью справились лишь около половины абитуриентов. Некоторые абитуриенты, получившие правильный ответ, не смогли его обосновать. Например, без доказательства принималось, что точки Q, L, N лежат на одной прямой.

4. Ответ. Наименьшая площадь $\sqrt[3]{\frac{5}{4} \cdot \frac{48}{25}}$ получается при $c = \frac{4}{5}$.

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y(x) = \sqrt[3]{x^2}$ в точке с абсциссой c имеет вид

$$y = \sqrt[3]{c^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{c}}(x - c).$$

Касательная пересекается с осью абсцисс в точке $x = -\frac{c}{2}$. Площадь треугольника ABC

(рис. 2) равна $S(c) = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| =$

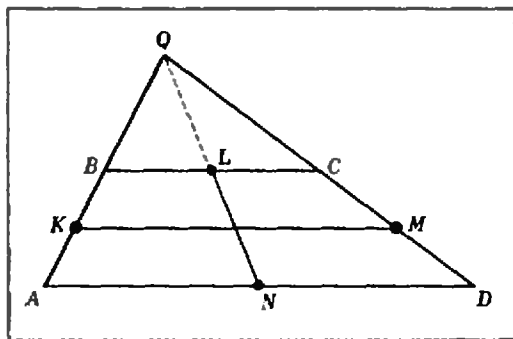


Рис. 1.

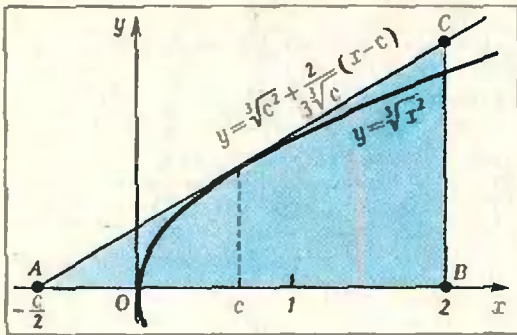


Рис. 2.

$$= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{c}{2} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{c^2 + 2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{c}} (2-c) \right) =$$

$$= \frac{(c+4)^2}{12\sqrt[3]{c}}.$$
 Поскольку $S'(c) = \frac{1}{36} c^{-\frac{4}{3}} (c+4) \times$
 $\times (5c-4)$ при $c > 0$, на промежутке $[0; +\infty[$
 функция $S(c)$ имеет только одну критическую
 точку $c = \frac{4}{5}$, причем $S'(c) < 0$ при $0 < c < \frac{4}{5}$
 (функция убывает) и $S'(c) > 0$ при $c > \frac{4}{5}$
 (функция возрастает). Кроме того, функция
 $S(c)$ непрерывна при $c = \frac{4}{5}$. Поэтому на от-
 резке $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$ функция $S(c)$ принимает наи-
 меньшее значение при $c = \frac{4}{5}$; $S\left(\frac{4}{5}\right) =$
 $= \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \cdot \frac{48}{25}$. Многие абитуриенты не справи-
 лись с этой задачей из-за ошибок, допущен-
 ных ими в вычислениях и преобразованиях.
 Значительная часть ошибок, допущенных при
 ее решении, связана с формальным усвое-
 нием соответствующих разделов школьной
 программы. Многие абитуриенты не смогли
 правильно объяснить, почему точка $c = \frac{4}{5}$ яв-
 ляется точкой, в которой функция $S(c)$ при-
 нимает наименьшее значение на отрезке
 $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$. Некоторые путали понятия «наи-
 меньшее значение» и «точка минимума».

5. Ответ, $a=2$.

Решение. Левая часть данного нера-
 венства определена при $a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Пусть сначала $a > 1$. Перейдя в первом
 логарифме к основанию 3 и умножая обе
 части неравенства на $\log_3 \frac{1}{a} < 0$, получим рав-
 носильное неравенство

$$\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1) \cdot \log_3(x^2+ax+6) < 1.$$

Здесь мы использовали тот факт, что
 $\log_a 3 \cdot \log_3 \frac{1}{a} = -1$. Пусть $u = x^2+ax+5$.
 Тогда последнее неравенство переписется в
 виде

$$\log_3(\sqrt{u}+1) \cdot \log_3(u+1) < 1.$$

Функция $f(u) = \log_3(\sqrt{u}+1) \cdot \log_3(u+1)$ оп-
 ределена и возрастает на $[0; +\infty[$. Заметим,
 что $f(4) = 1$. Поэтому $f(u) < 1$ тогда и только
 тогда, когда $0 < u < 4$. Следовательно, исход-
 ное неравенство равносильно системе нера-
 венств

$$0 < x^2+ax+5 < 4.$$

Решая эту систему, получим

$$1) \left[\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}; \frac{-a-\sqrt{a^2-20}}{2} \right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{-a+\sqrt{a^2-20}}{2}; \frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2} \right],$$

если $a^2-20 > 0$

$$2) \left[\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}; \frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2} \right].$$

если $\begin{cases} a^2-4 > 0 \\ a^2-20 < 0. \end{cases}$

3) Решений нет, если $a^2-4 < 0$.

Таким образом, система имеет ровно одно
 решение, если $a^2-4=0$. Учитывая, что $a > 1$,
 получаем $a=2$.

Если $0 < a < 1$, то исходное неравенство
 равносильно неравенству

$$\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1) \cdot \log_3(x^2+ax+6) > 1,$$

которое в свою очередь равносильно нера-
 венству

$$x^2+ax+5 > 4.$$

Последнее неравенство при любом a имеет
 бесконечно много решений; поэтому никакие
 a из рассматриваемого промежутка условию
 задачи не удовлетворяют.

С этой задачей большинство абитуриентов
 не справились.

В а р и а н т 2

(механико-математический факультет)

1. Найти все значения x , удовлетворяю-
 щие условию

$$(9-x^2)\sqrt{2-x} = 0.$$

2. Найти все решения уравнения

$$\sin x = \sqrt{5} \cos \frac{x}{2}.$$

3. Окружность радиуса 3, вписанная в
 треугольник ABC , касается стороны BC в точке
 D . Окружность радиуса 4 касается продол-
 жения стороны AB и AC и касается стороны
 BC в точке E . Найти $|ED|$, если величина
 угла BCA равна $\frac{2}{3}$ л.

4. Касательная к графику функции
 $\frac{1}{x^2}$ такова, что абсцисса c точки касания
 принадлежит отрезку $[5; 9]$. При каком зна-
 чении c площадь треугольника, ограничен-
 ного этой касательной, осью Ox и вертикаль-
 ной прямой $x=4$, будет наибольшей и чему
 равна эта наибольшая площадь?

5. Найти все значения a , при каждом
 из которых уравнение

$$4^{-|x-a|} \cdot \log_{\sqrt{3}}(x^2-2x+3) +$$

$$+ 2^{-x^2-2x} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(2|x-a|+2) = 0$$

имеет ровно три решения.

В а р и а н т 3

(химический факультет)

1. Решить уравнение

$$\log_7 \left(\frac{x+3}{21} \right) = \log_7 \left(\frac{2}{3x-6} \right).$$

2. Найти все решения уравнения
 $2 \cos^2(3x) - \cos(3x) = 0$.

3. На координатной плоскости рассматриваются прямоугольные треугольники ABC ($ACB = 90^\circ$), у каждого из которых вершина A имеет координаты $(-4; 0)$, вершина C лежит на отрезке $[0; 4]$ оси Ox , а вершина B лежит на параболе $y = 4x - x^2$. Какие координаты должна иметь вершина B , чтобы площадь прямоугольного треугольника ABC была наибольшей?

4. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, которая касается боковой стороны AB в точке M . Через точку M проведен перпендикуляр ML к стороне AC треугольника ABC (точка L — основание этого перпендикуляра). Найти величину угла BCA , если известно, что площадь треугольника ABC равна 1, а площадь четырехугольника $LMBC$ равна S .

5. Найти все такие значения a , для каждого из которых число решений относительно x уравнения
 $3(x^2 + a^2) = 1 - (9a^2 - 2)x$
 не превосходит числа решений относительно y уравнения

$$y + (3a - 2)^2 3^y = (8a - 4) \log_3(3^a - \frac{1}{2}) - 3y^3.$$

В а р и а н т 4

(биологический факультет)

1. Решить уравнение

$$1 + 2 \cos 3x \cos x - \cos 2x = 0.$$

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ на отрезке $[-5; 4]$.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x.$$

4. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26 м. Величина угла ABC равна 120° . Радиус окружности, вписанной в треугольник BCD , равен $\sqrt{3}$ м. Найти длины сторон параллелограмма, если известно, что длина стороны AD больше длины стороны AB .

5. Найти все те решения уравнения

$$3 \sin^3 x - 3 \cos^2 x + 7 \sin x - \cos 2x + 1 = 0,$$

которые являются также решениями уравнения

$$\cos^2 x + 3 \cos x \sin 2x - 8 \sin x = 0.$$

В а р и а н т 5

(факультет почвоведения)

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126. \end{cases}$$

2. Найти все значения x , при которых производная функции

$$y = 4x - \sin 2x + 4\sqrt{2} \cos x$$

равна нулю.

3. Хорды AB и AC имеют одинаковую длину. Величина образованного ими вписанного в окружность угла равна $\frac{\pi}{6}$. Найти отношение площади той части круга, которая заключена в этом угле, к площади всего круга.

4. Решить неравенство

$$(4x^2 - 16x + 7) \log_2(x - 3) > 0.$$

В а р и а н т 6

(географический факультет)

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и параболой

$$y = -2(x - 1)^2 + 8.$$

2. Решить уравнение

$$\log_{x-1} 3 = 2.$$

3. В правильную шестиугольную пирамиду вписан прямой конус и около нее описан прямой конус. Даны высота пирамиды H и радиус основания описанного конуса R . Найти разность объемов описанного и вписанного конусов.

4. Решить уравнение

$$\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{15}{8} \cos 2x - \frac{1}{2}.$$

5. Найти все пары чисел $(x; y)$ удовлетворяющие условиям $x < 0$, $y > 0$ и системе

$$\begin{cases} \left| y + \frac{1}{x} \right| + \left| \frac{13}{6} + x - y \right| = \frac{13}{6} + x + \frac{1}{x}, \\ x^2 + y^2 = \frac{97}{36}. \end{cases}$$

В а р и а н т 7

(экономический факультет, отделение политической экономии)

1. Решить уравнение

$$\log_2 \left(\frac{1}{|x-1| - 1} \right) = 1.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырьмя линиями: $y = -x^2 + x + 2$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.

3. На плоскости даны две окружности радиусов 12 см и 7 см с центрами в точках O_1 и O_2 , касающиеся некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежащие по одну сторону от этой прямой. Отношение длины отрезка

$M_1 M_2$ к длине отрезка $O_1 O_2$ равно $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Вычислить длину отрезка $M_1 M_2$.

4. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определить, сколько кг олова содержится в полученном новом сплаве.

5. Найти все целые значения параметра k , при каждом из которых уравнение

$$5 \pm 4 \sin^2 x - 8 \cos^2 \frac{x}{2} = 3k$$

имеет решение. Найти все эти решения.

В а р и а н т 8

(экономический факультет, отделение планирования и экономической кибернетики)

1. Решить неравенство

$$\log_3(26 - 3^x) > 2.$$

2. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 см, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2:3. Найти длины сторон треугольника.

3. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 9x - 4y + 6 = 0, \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

4. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ найти наибольшее значение функции

$$y = 5 \cos x - \cos 5x.$$

5. На прямой дороге расположены последовательно пункты A, B, C, D . Расстояния от пункта A до пунктов B, C и D находятся в отношении 1:2:4. В направлении от A к D по дороге через равные промежутки времени с одной и той же скоростью едут автобусы. Из A в D вышел в разное время три пешехода и пошли по дороге с одной и той же скоростью. Первого пешехода в пути между A и B обогнали 3 автобуса. Второго пешехода между A и C обогнали 4 автобуса. Третий пешеход вышел из A и прибыл в D , когда через эти пункты проезжали очередные автобусы. Сколько автобусов обогнали третьего пешехода в пути между A и D ?

В а р и а н т 9

(факультет психологии)

1. Решить уравнение

$$(\sqrt{3})^{\lg 2x} - \frac{3\sqrt{3}}{3^{\lg 2x}} = 0.$$

2. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2u + v = 7, \\ |u - v| = 2. \end{cases}$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC угол A прямой, величина угла B равна 30° , а радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найти расстояние от вершины C до точки касания вписанной окружности и катета AB .

4. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = \frac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

5. Доказать, что для любых действительных чисел p и l справедливо неравенство

$$2(2p-1)^4 + 1 + [1-2(2p-1)^4] \sin 2l > 0,$$

и найти все пары чисел (p, l) , для которых это неравенство превращается в равенство.

*И. Мельников,
А. Мищенко*

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. В системе, изображенной на рисунке 3, грузы с массами m_1 и m_2 лежат на гладкой горизонтальной плоскости. Невесомая и нерастяжимая нить, соединяющая грузы, перекинута через невесомые блоки. Трение в осях блоков отсутствует. В определенный момент времени на ось верхнего блока начинают действовать силой \vec{F} , направленной верти-

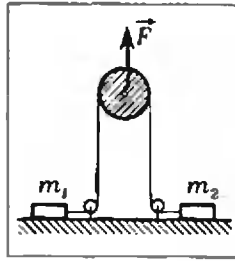


Рис. 3.

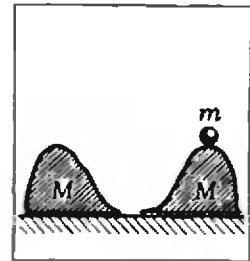


Рис. 4.

кально вверх. Найдите зависимость проекции v относительной скорости грузов от времени.

2. Два конькобежца с массами $m_1 = 40$ кг и $m_2 = 60$ кг встали на лед друг против друга, держась за легкий шнур и слегка натянув его. Затем один из них начинает укорачивать шнур, наматывая его на руку. Какую работу A он совершит к тому моменту, когда будет выбирать шнур со скоростью $|v| = 2$ м/с? Трением о лед пренебречь. Укорачивание шнура происходит при постоянном натяжении.

3. На гладкой горизонтальной плоскости на некотором расстоянии друг от друга стоят две одинаковые гладкие горки массой M и высотой H (рис. 4). На вершине одной из них находится небольшое тело массой m . После легкого толчка тело соскальзывает с этой горки и поднимается на другую. На какую максимальную высоту h поднимется тело по второй горке?

4. Камеру объемом $V = 10$ л наполнили сухим воздухом при нормальных условиях и, закрыв после введения $M = 3$ г воды, нагрели до $t = 100^\circ\text{C}$. Определите давление p в камере.

5. Идеальный газ массой m , находящийся при температуре T_0 , охлаждается изохорически так, что давление падает в k раз. Затем газ расширяется изобарически, пока его температура не станет равной первоначальной. Определите работу газа A . Молярная масса газа равна μ .

6. В цилиндр объемом V с теплопроводящими стенками, заполненный газом с молярной массой μ , находящимся при температуре T и давлении p , внесен медный шар малого объема массой M при температуре T_1 . Какая температура T_2 установится в цилиндре, если удельная теплоемкость газа равна c , а меди — c_1 ?

7. Определите заряд q конденсатора емкостью $C = 3$ мкФ (рис. 5). Внутренним сопротивлением батарей пренебречь. $\mathcal{E} = 2$ В.

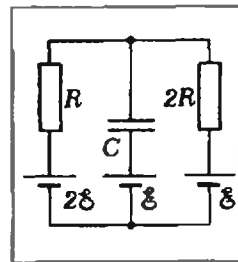


Рис. 5.

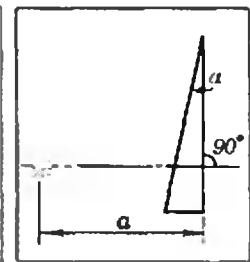


Рис. 6.

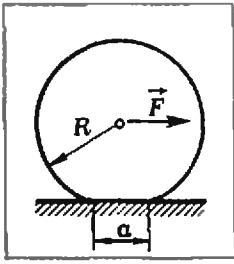


Рис. 7.

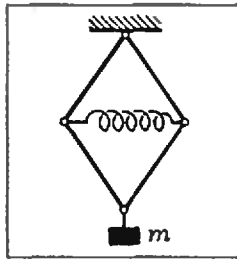


Рис. 8.

8. На отстоящие друг от друга на расстояние $a=10$ см горизонтальные рельсы положен медный стержень, который может катиться вдоль них. Рельсы подключены к батарее с ЭДС $\mathcal{E}=3$ В и внутренним сопротивлением $r=5$ Ом; перпендикулярно к плоскости рельсов создано магнитное поле. Определите индукцию $|\vec{B}|$ поля, при которой стержень будет двигаться с наибольшей установившейся скоростью, и эту скорость $|\vec{v}_{\text{max}}|$. Сопротивлением рельсов и стержня пренебречь; силу сопротивления движению стержня считать равной $|\vec{F}|=0,06$ Н (\vec{F} — механическая сила).

9. Прямоугольный стеклянный сосуд наполнен жидкостью и освещается снизу маленькой лампочкой, расположенной под сосудом вблизи его дна. Каково минимальное значение показателя преломления жидкости n_{min} , при котором лампочку нельзя увидеть сквозь боковые стенки сосуда?

10. На какую величину x смещается изображение малого предмета относительно самого предмета при рассмотривании его через тонкую призму с малым преломляющим углом α (рис. 6)? Расстояние между предметом и призмой равно a , показатель преломления стекла призмы равен n . Лучи на призму падают под малыми углами.

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Поезд массой $M=1000$ т двигался равномерно по горизонтальному пути. От поезда отцепилась часть вагонов массой $m=100$ т. По какому закону будет изменяться со временем расстояние s между частями состава (до остановки отцепившейся части состава)? Тяга локомотива остается постоянной, коэффициент трения $\mu=5 \cdot 10^{-3}$, ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

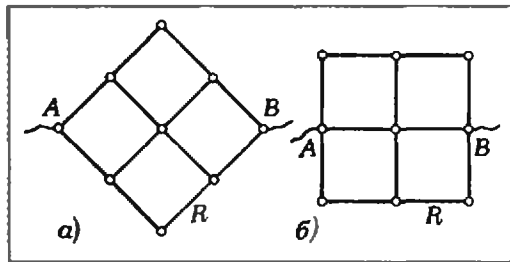


Рис. 9.

2. На колесе радиусом $R=10$ см имеется плоская часть длиной $a=1$ см (рис. 7). При какой величине коэффициента трения μ колесо будет скользить, а не катиться по гладкой горизонтальной поверхности, если его плавно тянуть за ось вращения?

3. Система, изображенная на рисунке 8, состоит из четырех шарнирно соединенных одинаковых невесомых стержней и невесомой пружины. В ненагруженном состоянии ($m=0$) стержни образуют квадрат и длина пружины $l=9,8$ см. При подвешивании к нижнему шарниру груза массой $m=500$ г острый угол между стержнями $\alpha=60^\circ$. Найдите коэффициент жесткости пружины k , считая ускорение свободного падения $g=9,8$ м/с².

4. Два одинаковых сосуда соединены трубкой с крапом. В первом сосуде находится 1 моль идеального одноатомного газа при давлении $p=100$ кПа и температуре $t_1=27^\circ$ С. В другом — такой же газ при том же давлении и температуре $t_2=227^\circ$ С. Кран открыли и температуры газов выравнялись. Какое давление p' установится в системе? Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

5. Два металлических шара с радиусами $r_1=0,01$ м и $r_2=0,05$ м находятся друг от друга на расстоянии много большем их радиусов. Шары несут заряды $q_1=8 \cdot 10^{-8}$ Кл и $q_2=4 \cdot 10^{-8}$ Кл соответственно. Их поместили в жидкий диэлектрик и измерили силу взаимодействия. Затем шары извлекли из диэлектрика, соединили проводником на короткое время и вновь измерили силу взаимодействия. Она осталась неизменной. Найдите диэлектрическую проницаемость ϵ диэлектрика.

6. Чему равно сопротивление R_{AB} цепи между точками A и B, если она составлена из одинаковых элементов, сопротивление каждого из которых равно R ? Варианты соединения элементов показаны на рисунках 9, а и б.

7. Электрическая цепь имеет форму окружности радиусом $R=0,5$ м (рис. 10). Четыре гальванических элемента с ЭДС $\mathcal{E}_1=2$ В, $\mathcal{E}_2=4$ В, $\mathcal{E}_3=3$ В и $\mathcal{E}_4=5$ В соединены последовательно друг с другом и имеют внутренние сопротивления $r_1=1$ Ом, $r_2=2$ Ом, $r_3=1$ Ом, $r_4=0,5$ Ом соответственно. Однородное магнитное поле перпендикулярно к плоскости цепи, направлено за чертеж и возрастает со временем по закону $|\vec{B}|=kt$, где $k=4$ Тл/с. Чему равна сила тока I в цепи? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

8. Какова глубина бассейна H , если человек, глядя под углом $\alpha=30^\circ$ к поверхности

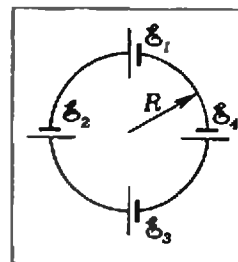


Рис. 10.

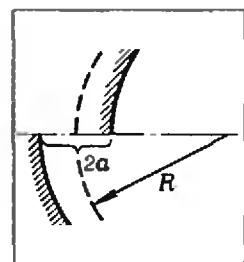


Рис. 11.

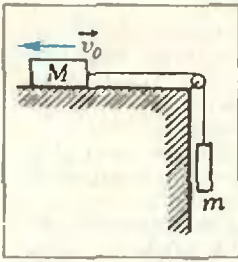


Рис. 12.

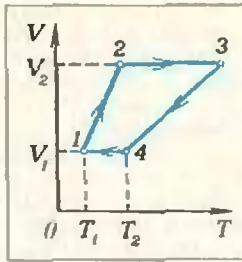


Рис. 13.

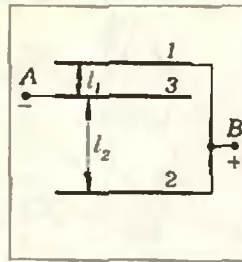


Рис. 14.

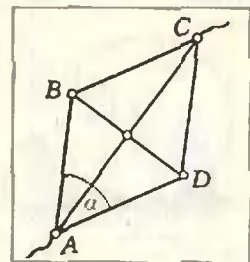


Рис. 15.

воды, видит монету лежащей на дне на расстоянии $l=0,5$ м дальше от себя, чем она есть на самом деле? Показатель преломления воды $n=1,3$.

9. В фокусе вогнутого сферического зеркала радиусом $R=0,3$ м расположен точечный источник света. Зеркало разрезают пополам плоскостью, в которой лежит главная оптическая ось, и симметрично раздвигают полученные половинки на расстоянии $2a=20$ см вдоль плоскости разреза (рис. 11). Определите расстояние s между изображениями источника в верхней и нижней частях зеркала.

10. На главной оптической оси перед рассеивающей линзой с фокусным расстоянием $F=20$ см расположен источник света. По другую сторону линзы перпендикулярно главной оптической оси линзы расположено плоское зеркало. Найдите расстояние s между источником и его изображением в зеркале. Источник удален от зеркала на расстоянии $l=1$ м, а от линзы — на расстоянии $l=30$ см.

Географический, геологический и химический факультеты, факультет почвоведения

1. Расстояние между двумя железнодорожными станциями, равное $s=18$ км, поезд проходит за время $t=20$ мин. Первые $t_1=5$ мин он идет равноускоренно (без начальной скорости), а затем — равнозамедленно, пока не остановится. Определите ускорение поезда на пути разгона.

2. На гладком горизонтальном столе лежит брусок массой $M=300$ г. (рис. 12). На краю стола укреплен невесомый блок, способный вращаться без трения. Брусок связан нитью, перекинутой через блок, с телом массой $m=100$ г. Начальная скорость бруска направлена от блока и равна $|\vec{v}_0|=4,9$ м/с. Определите следующие величины через время $t=4$ с после начала движения бруска: 1) модуль и направление скорости \vec{v} бруска; 2) расстояние s бруска от его начального положения.

3. Частота малых колебаний математического маятника в лифте, спускающемся с постоянной скоростью, равна $\nu_0=1$ Гц. Чему будет равна частота ν_1 колебаний, если лифт замедляет свое движение с ускорением $a=-9,8$ м/с²? Ускорение свободного падения тел считать равным $g=9,8$ м/с².

4. В латунном цилиндрическом сосуде находится вода. При температуре $t_1=15^\circ\text{C}$ высота столба воды $h_1=1$ м. На сколько поднимется уровень воды в сосуде, если температуры воды и сосуда повысятся на

$\Delta t=5^\circ\text{C}$? Коэффициент объемного расширения воды $\alpha=1,5 \cdot 10^{-4}\text{K}^{-1}$, коэффициент линейного расширения латуни $\beta=2 \cdot 10^{-5}\text{K}^{-1}$.

5. В цилиндре тепловой машины находится 1 моль идеального газа. Найдите работу газа A за один цикл, диаграмма которого показана на рисунке 13.

6. Конденсатор составлен из трех плоских параллельных прямоугольных пластин, как показано на рисунке 14. Расстояния между пластинами $l_1=1$ мм и $l_2=10$ мм. Площадь пластины $S=500$ см². Определите заряд q на средней пластине, если разность потенциалов между точками A и B $U=100$ В. Пространство между пластинами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon=2$. Электрическая постоянная $\epsilon_0=8,85 \times 10^{-12}$ Ф/м.

7. Электрическая цепь представляет собой ромб с двумя диагоналями, изготовленный из одинаковых проволок (рис. 15). Угол $\gamma=60^\circ$. Цепь в точках A и C подключена к источнику с напряжением $U=100$ В. Определите количество теплоты q , выделяемое в единицу времени в каждой из проволок: AB , BC , CD , AD , BD и AC . Сопротивление стороны ромба $R=250$ Ом.

8. Аккумулятор, имеющий ЭДС $\mathcal{E}_1=12$ В, заряжается от источника с ЭДС $\mathcal{E}_2=18$ В через лампу накаливания, потребляющую при этом мощность $P=24$ Вт. Какое время t будет заряжаться аккумулятор, если его емкость $C=40$ ампер-часов? Внутренними сопротивлениями источника и аккумулятора пренебречь.

9. Два плоских зеркала образуют двугранный прямой угол. Луч света падает на одно из зеркал под углом $\alpha=\pi/6$ на расстоянии $a=20$ см от ребра угла. Плоскость падения перпендикулярна ребру. Определите расстояние x между падающим и выходящим (после двукратного отражения) лучами.

10. Точечный источник света помещен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=10$ см на расстоянии $d=30$ см от линзы. Линза сместилась в направлении, перпендикулярном своей оптической оси, на расстояние $a=2$ см. На какое расстояние x сместилась при этом изображение источника?



Заочная школа программирования

Урок 14: Работа с графами

На страницах «Кванта» за последние годы много раз публиковались статьи о графах и связанных с ними математических задачах. Почти в каждой статье говорилось, что для решения таких задач широко используются вычислительные машины. Сегодня мы рассказываем о том, как работать с графами на ЭВМ, используя возможности языка Рапира.

Учащиеся ЗШП, не знакомые с основными определениями теории графов, могут их прочитать в статье В. Евстигнеева на с. 18 этого номера*).

* Для выполнения заданий 14-го урока нет необходимости читать всю указавшую статью; нужна только основные определения, данные в начале. Однако мы очень советуем учащимся ЗШП прочитать и подробно разобрать статью целиком.

Нагруженные графы

Структура самых разнообразных систем, с которыми приходится иметь дело на практике, может быть описана при помощи графов. Очень часто встречаются задачи, в условиях которых нужно учитывать не только наличие связей между элементами системы, но и свойства этих связей, а также свойства самих элементов. Для описания условий таких задач приходится «нагружать» графы, то есть ставить в соответствие их ребрам или вершинам (а иногда и тем, и другим) какие-то числа, тексты или другие объекты. Например, если систему дорог Шпаговского сельсовета (рис. 1, а) нужно представить в виде графа и не потерять при этом информацию о длине каждой дороги, то получится граф с нагруженными ребрами (рис. 1, б).

З а д а н и е 14.1. Изобразите в виде нагруженного графа схему авиалиний между столицами союзных республик СССР с указанием расстояний.

Графы в памяти ЭВМ

Если в ходе решения задачи вам понадобится записать в память ЭВМ несколько множеств и выполнить над ними обычные математические опе-

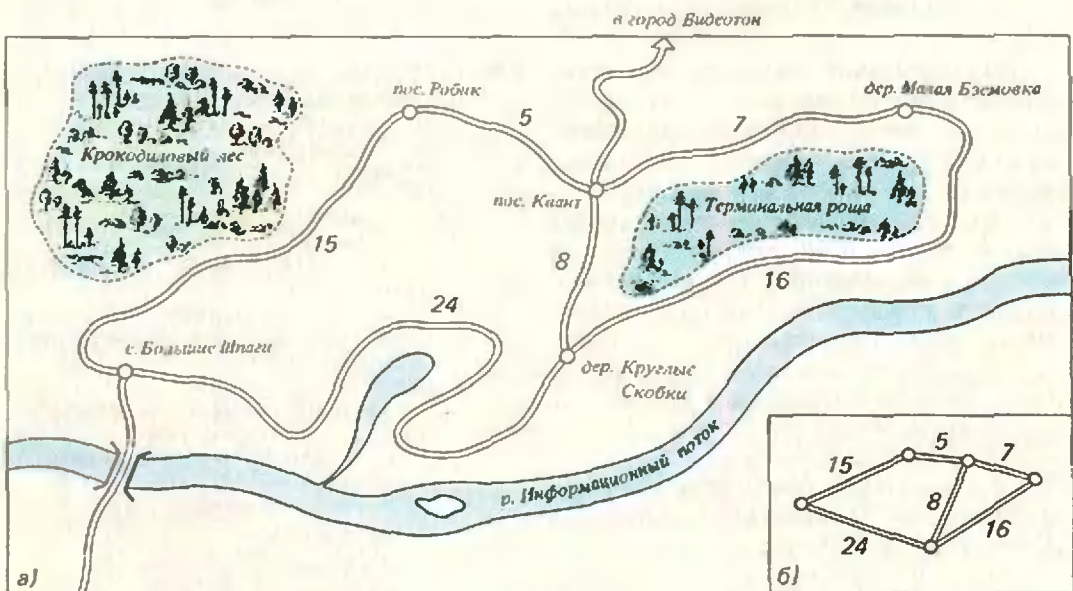


Рис. 1.

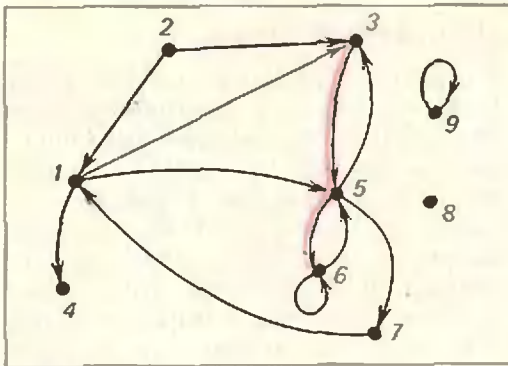


Рис. 2.

рации, то на языке Рапира вы сумеете это сделать без труда. Но специальных средств для работы с графами на Рапире нет, поэтому способ описания графа на этом языке программирования нужно придумать самим.

Посмотрим, что должна помнить машина, чтобы знать об ориентированном графе все, что нужно для решения задач. Во-первых, она должна помнить множество вершин. Для этого, конечно, нужно как-то обозначить каждую вершину, например, занумеровать, как на рисунке 2. Во-вторых, необходимо помнить, где начинается и где заканчивается каждая дуга. Чаще всего дугу описывают при помощи кортежа, составленного из обозначений ее начальной и конечной вершин. Например, на том же рисунке дугу, связывающую вершины 1 и 5, можно описать кортежем $\langle 1,5 \rangle$.

Информацию о всех дугах орграфа можно запомнить в виде множества, составленного из таких кортежей. Наконец, кортеж, составленный из двух описанных множеств — множества вершин и множества дуг, — это и есть полное описание орграфа на Рапире. Например, орграф, изображенный на рисунке 2, может быть описан так:

```

<(*1,2,3,4,5,6,7*)
<*(1,3),<1,5),<1,4),<2,1),
  <2,3),<3,5),<5,3),<5,6),
  <5,7),<6,5),<6,6),<7,1)*>>

```

За д а н и е 14.2. Нарисуйте ориентированный граф, описание которого на Рапире выглядит так:

```

<(*1,2,3,4,5,6*),<*(1,4),<2,1),
  <3,1),<3,2),<3,4),<3,5),<4,5),
  <5,6),<6,2),<6,3)*>>

```

Если нужно описать орграф с нагруженными дугами, то в кортежах, описывающих дуги, появляется третий элемент — значение нагрузки. В задании 14.3. Граф БУКОВКИ описан на Рапире так:

```

<(*1,2,3,4,5,6*)
<*(1,2,'Т'),<2,3,'Р'),<2,5,'К'),<3,5,'А'),
  <4,1,'Н'),<4,4,'Т'),<5,6,'В'),<6,4,'А')*>>
->БУКОВКИ;

```

Нагрузкой каждой дуги является текст. Двигаясь вдоль любого пути в графе и выписывая подряд соответствующие дугам тексты, можно получать различные слова.

а) Какой текст соответствует дуге, проходящему через вершины 2,5,6,4,1,2?

б) По какому пути нужно двигаться, чтобы получилось слово ВАТА?

в) Существует ли в графе путь, двигаясь вдоль которого можно было бы получить слово РАК? Слово ТРАВА?

Для того чтобы облегчить ввод сведений о графе в память ЭВМ, удобно описать функцию, которая будет запрашивать в диалоговом режиме все нужные сведения. Для ориентированного графа с занумерованными вершинами и дугами с числовой нагрузкой эта функция могла бы выглядеть так:

```

ПРОЦ ЗАПРОС=>ГРАФ;
<(**) -> ВЕРШИНЫ; <(**) -> ДУГИ;
ПЕЧАТЬ('СКОЛЬКО ВЕРШИН В ГРАФЕ?');
ВВОД(1) -> ЧИСВЕР; 1 -> НОМВЕР;
ПОКА НОМВЕР = < ЧИСВЕР::
  ВЕРШИНЫ + (<НОМВЕР*)
  -> ВЕРШИНЫ;
  НОМВЕР + 1 -> НОМВЕР
ВСЕ;
'ДА' -> ПРОДОЛЖЕНИЕ;
ПОКА ПРОДОЛЖЕНИЕ = 'ДА':
  ПЕЧАТЬ('НАЗОВИТЕ НАЧАЛЬНУЮ ВЕРШИНУ');
  ВВОД(1) -> НАЧВЕР;
  ПЕЧАТЬ('НАЗОВИТЕ КОНЕЧНУЮ ВЕРШИНУ');
  ВВОД(1) -> КОНВЕР;
  ПЕЧАТЬ('НАЗОВИТЕ НАГРУЗКУ');
  ВВОД(1) -> НАГРУЗКА;
  ЕСЛИ (НАЧВЕР ИЗ ВЕРШИНЫ)
  И (КОНВЕР ИЗ ВЕРШИНЫ) ТО
  ДУГИ + (*<НАЧВЕР,КОНВЕР,
  НАГРУЗКА*) -> ДУГИ;
  ПЕЧАТЬ('ЕСТЬ ЛИ ЕЩЕ ДУГИ?');
  ВВОД(0) -> ПРОДОЛЖЕНИЕ

```

ИНАЧЕ ПЕЧАТЬ('ОШИБКА
В НОМЕРЕ ВЕРШИНЫ')
ВСЕ
ВСЕ;

⟨ВЕРШИНЫ, ДУГИ⟩—>ГРАФ
КНЦ.

Задание 14.4 Придумать способ хранения в памяти машины сведений о графе с нагруженными вершинами и описать функцию для диалогового ввода сведений о таком графе.

Простейшие задачи

В ориентированных графах *степенью входа* называется число входящих в вершину дуг, *степенью выхода* — число выходящих дуг. Сумма этих двух чисел называется *полной степенью* вершины. Вершина называется *источником*, если ее степень входа равна нулю, *стоком*, если нулю равна степень выхода, и *изолированной*, если ее полная степень равна нулю. Так, на рисунке 2 имеется ровно один сток (вершина 4), один источник (2) и одна изолированная вершина (8; вершина 9 не считается изолированной, ибо ее полная степень равна двум).

Будем считать, что кортеж ГРАФ содержит сведения об ориентированном графе с нагруженными дугами (нагрузка каждой дуги — натуральное число). Попробуем составить программы для решения некоторых задач, связанных с этим графом.

Задача 1. Найти все источники, стоки и изолированные вершины.

Алгоритм решения очевиден: для каждой вершины подсчитываем ее степень входа и степень выхода. Для этого просматриваем все дуги и находим те, которые начинаются или заканчиваются в этой вершине;

для ВЕРШ ИЗ ГРАФ[1]:

0—>ВХОД; 0—>ВЫХОД;

для ДУГА ИЗ ГРАФ[2]:

ЕСЛИ ДУГА[1] = ВЕРШ ТО

ВЫХОД+1—>ВЫХОД ВСЕ;

ЕСЛИ ДУГА[2] = ВЕРШ ТО

ВХОД+1—>ВХОД ВСЕ;

ВСЕ;

ЕСЛИ (ВЫХОД+ВХОД) = 0

ТО ПЕЧАТЬ('ВЕРШИНА'

ВЕРШ,'—ИЗОЛИРОВАННАЯ')

ИНАЧЕ

ЕСЛИ ВЫХОД = 0

ТО ПЕЧАТЬ('ВЕРШИНА'

ВЕРШ,'—СТОК')

ИНАЧЕ ЕСЛИ ВХОД = 0

ТО ПЕЧАТЬ('ВЕРШИНА',
ВЕРШ,'—ИСТОЧНИК')

ВСЕ ВСЕ ВСЕ;

ВСЕ;

Задание 14.5. Составить программу, которая для каждой вершины отпечатает ее степень входа, степень выхода и полную степень.

Задача 2. Путь в графе задан кортежем вершин под названием ПУТЬ. Найти полную нагрузку пути, то есть сумму нагрузок по всем его дугам.

Программа, решающая эту задачу, может выглядеть так:

0—>СУММА; 1—>НОМЕР;

ПОКА НОМЕР < (#ПУТЬ)::

0—>КОНТРОЛЬ;

для ДУГА ИЗ ГРАФ[2]:

ЕСЛИ ДУГА[1] = ПУТЬ[НОМЕР]

И (ДУГА[2] = ПУТЬ[НОМЕР+1])

ТО СУММА+ДУГА[3]—>СУММА;

КОНТРОЛЬ+1—>КОНТРОЛЬ

ВСЕ

ВСЕ;

ЕСЛИ КОНТРОЛЬ = 0

ТО ПЕЧАТЬ('ОШИБКА!

ПУТИ НЕ СУЩЕСТВУЕТ');

#ПУТЬ—>НОМЕР

ИНАЧЕ НОМЕР+1—>НОМЕР

ВСЕ

ВСЕ;

ЕСЛИ КОНТРОЛЬ = 0 ТО

ПЕЧАТЬ('ПОЛНАЯ НАГРУЗКА

РАВНА',СУММА);

ВСЕ;

Задание 14.6. Поясните, как поведет себя эта программа, если некоторые из вершин в графе соединены несколькими дугами?

Задание 14.7. Описать на Робеке функцию для построения множества вершин, в которые можно попасть из данной вершины за один шаг (то есть двигаясь по одной дуге).

И в заключение — несколько заданий повышенной трудности.

Задание 14.8. Указать алгоритм для нахождения множества вершин, в которые можно попасть из данной вершины

а) не более чем за N шагов;

б) за какое-нибудь число шагов.

Задание 14.9. Составить программу для отыскания кратчайшего пути между двумя заданными вершинами (то есть пути с наименьшей полной нагрузкой — см. задачу 2).

Г. Звенигородский



Отдых и занятия наукой

На южном берегу Крыма, между Ялтой и Алуштой, расположились многочисленные корпуса Всесоюзного пионерского лагеря Артек. В эту своеобразную пионерскую республику приезжают ребята из разных концов нашей страны. Здесь они отдыхают, набираются сил и здоровья, приобретают навыки, необходимые для успешной работы в своих школьных пионерских отрядах и дружинах, разучивают новые песни, учатся танцевать, принимают участие в спортивных соревнованиях.

Однако пребывание в Артеке это не только активный отдых, но и приобретение к новым знаниям. Для этого в лагере созданы все необходимые условия. Развернуты превосходные, содержательные выставки, действуют различные музеи, созданы прекрасно оснащенные кабинеты для работы научно-технических кружков.

Летние смены в Артеке длятся 30 дней, зимние — 40. Жизнь юных артековцев насыщена множеством интересных повседневных дел. К тому же — экскурсии, поездки по памятным и историческим местам Крыма, морские прогулки. В этих условиях на кружковые занятия удается выделить не так уж много времени: пять полурочасовых занятий в летний период и восемь в зимний. Естественно, перед руководителями кружковой работы встал вопрос: как ее построить? За несколько часов радиоэлектронике, электронно-вычислительной технике, фотографированию или методам астрономических наблюдений обучить невозможно. Нельзя за такой короткий срок и сообщить ребятам сколько-нибудь систематизированные знания. Стоит ли тогда вообще проводить кружковую работу?

В Артеке твердо решили — стоит. И цель кружковой работы была определена так: дать представление, заинтересовать, предоставить возможность непосредственно прикоснуться к тому, что составляет существо данной области науки и техники.

Как выглядит осуществление этой цели на практике? Вместе с заведующим отделом кружковой работы Артека П. И. Первухиным мы поднимаемся на второй этаж Дома пионерской учебы в лабораторию вычислительной техники. Идет очередное занятие. За столом человек двадцать ребят, перед ними разнообразные вычислительные устройства. У доски с куском мела в руке руководитель кружка кандидат технических наук Е. В. Кадушкин. Он охотно знакомит нас с программой кружковых занятий и особенностями их проведения.

Начинаются они с того, что ребята, решившие заниматься в кружке вычислительной техники, знакомятся с историей ее развития, ролью в современной науке и народном хозяйстве, а также с основными типами вычислительных устройств — от арифмометров до электронно-вычислительных машин.

Затем ребятам рассказывается о двоичной системе счисления и основных арифметических операциях, осуществляемых в этой системе. Теоретические занятия сопровождаются практически: кружковцы учатся самостоятельно выполнять арифметические операции на различных вычислительных устройствах.

Следующий этап — знакомство с принципами работы ЭВМ и их основных блоков, а также с порядком выполнения команд и различными способами ввода и вывода информации. Сопутствующая практическая работа — вычисления на электронно-клавишных вычислительных машинах с использованием памяти.

В заключение членам кружка дается представление об алгоритмах и принципах программирования, о машинном языке. В качестве практического примера

составляются алгоритм и программа для решения задачи извлечения квадратного корня из любого числа с заданной точностью. Это занятие завершается практической работой — решением оригинальных примеров на электронно-клавишных вычислительных машинах (ЭКВМ).

Вообще каждое занятие кружка строится приблизительно так: вводная теоретическая часть, игровая часть, когда руководитель разбирает с кружковцами ряд интересных математических примеров и шуток, и практическая работа.

По аналогичному принципу строятся и занятия кружка радиоэлектроники, которым руководит А. М. Пожарский. Только здесь еще большее значение придается самостоятельной практической работе. Это не случайно — тот, кто всерьез интересуется радиоэлектроникой, должен дружить с паяльником, хорошо знать основные требования безопасности при работе с инструментами, разбираться в различных деталях, уметь читать и собирать современные схемы.

Кружковцы знакомятся с основными сведениями о современной радиоэлектронике и ее теоретических основах, успевают на занятиях кружка поддержать в руках различные радиодетали, собрать простейший телефон с угольным микрофоном, смонтировать сначала детекторный, потом триодный приемник, а затем и такие электронные устройства как триггер, мультивибратор и реле времени.

Отличительной особенностью всех научно-технических кружков Артека является конкурсный характер заключительного занятия. В частности, члены кружка вычислительной техники участвуют в конкурсе на быстрое, правильное решение оригинальных примеров на ЭКВМ, а члены кружка радиоэлектроники — на скоростную сборку предложенного руководителем радиоэлектронного устройства. Победители конкурса и активные кружковцы награждаются грамотами и памятными сувенирами.

В. Комаров

Шахматная страничка



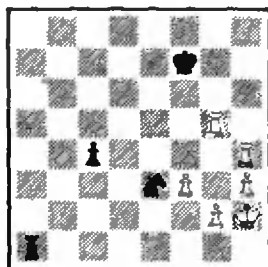
Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Майя жертвует коней

В «Кванте» № 9 за 1980 год мы рассказали о четвертьфинальных матчах претендентов среди мужчин. В сегодняшнем, мартовском номере журнала хочется вспомнить, как складывались дела на подступах к шахматному трону у женщин.

Экс-чемпионка мира Н. Гаприндашвили победила Н. Гуриели 6:3, Н. Иоселиани с тем же счетом обыграла Ж. Вереси из Венгрии. В двух других четвертьфиналах Н. Александрия взяла верх над Е. Ахмыловской 5,5:3,5, а М. Литинская — над Т. Лемачко из Болгарии 5,5:2,5.

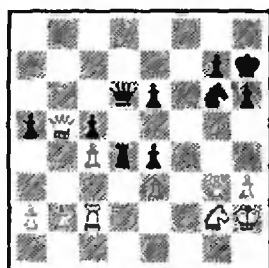
Полуфинальные матчи проходили на редкость напряженно. После восьми партий Нона Гаприндашвили вела 5:3 и ей достаточно было сделать одну ничью. Однако Нана Иоселиани проявила необычайную твердость духа и сравняла счет со своей именитой соперницей — 5:5. Две дополнительные партии заканчиваются ничью. Назначаются еще две, решающие. В 13-й снова ничья. Теперь Ноне необходима победа — она меньше партий выиграла черными и по положению при счете 7:7 выбывает из борьбы. При доигрывании последней партии возникла следующая позиция.



Н. Гаприндашвили — Н. Иоселиани

Перевес белых беспорочен. Быстрее всего вело к цели 1. Лe5 Лe1 2. Лh6, после чего черный король получал линейный мат. Гаприндашвили избирает более спокойный путь: 1. Лf4 + Крe6 2. Лe4 + Крf6 3. Л:e3 Кр:g5. Здесь легко выигрывало 4. Лe5 + Крf6 5. Лc5 Лc1 6. h4 e3 (6... Крe6 7. h5 Крd6 7. h6!) 7. g4 e2 8. Кpg2 и т. д. Однако нервы Ноны не выдерживают, и она вновь действует неточно — 4. h4 + Крf5 5. Лe4 e3 6. g4 + Крf6 7. Лc4 Лc1 8. Кpg3 Крe5 9. Лe4 + Крd5 10. Крf4 Лh1 11. Лe5 + Крd4. Теперь уже выигрывает проблематично (проанализируйте позицию самостоятельно). Во всяком случае белые его не нашли и через 20 ходов вынуждены были смириться с ничьей.

Исход другого полуфинала, после того как счет стал 3:1 в пользу Александрии, не вызывал сомнения. Но в этот момент Литинская одерживает три победы подряд и выходит вперед. После такого поворота событий трудно устоять, и Нана с трудом спасает следующие две партии. Однако в заключительном поединке она показывает себя замечательным бойцом и сравнивает счет, а затем, воодушевленная успехом, выигрывает обе дополнительные встречи. Вот как эффектно закончился этот матч.



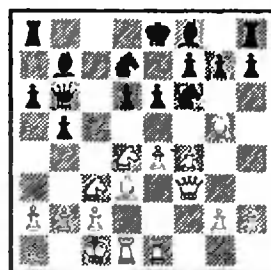
М. Литинская — Н. Александрия

После отступления ладьи позиция еще оставалась острой, однако было сыграно 1... Кe5!, и Литинская поздравила соперницу с выходом в финал. На 2. ed следует 2... Кf3 + 3. Крh1 Ф:g3, и мат следующим ходом: 2. Кf4 Лd2 + и т. д.; 2. h4 Кf3 + 3. Крh3 Лd1 4. Кf4 Лh1 + 5. Кpg4 Фe5.

Удивительны все-таки достижения грузинской шахматной школы. Если в двух предыдущих циклах борьбы за шахматную корону ее судьба решалась в споре грузинских шахматисток, то теперь и финальный матч претенденток стал их внутренним делом! В нем верх взяла Н. Александрия (6,5:2,5).

Звание чемпионки мира по шахматам начало разыгрываться в 1927 году. К сегодняшнему дню на троне побывало шесть шахматных королев: Вера Менчик (1927—1944 г.), Людмила Руденко (1950 г.), Елизавета Быкова (1953, 1958 г.), Ольга Рубцова (1956 г.), Нона Гаприндашвили (1962—1978 г.) и Майя Чибурдаидзе (1978 г.).

Пока соперницы Майи выясняли отношения, чемпионка мира участвовала в мужских турнирах. Без преувеличения можно сказать, что ее выступление в полуфинале первенства СССР и в первой лиге сенсационно! В полуфинале она лидировала на протяжении всей длинной дистанции и лишь в последнем, 15-м туре позволила себя обойти. А при удаче она сразу выходила в высшую лигу — самый сильный турнир в нашей стране. Приводим окончание партии, ставшей жемчужиной таллинского полуфинала.



М. Чибурдаидзе — С. Двойник

1. Кd5!! ed 2. Кc6!! С:c6 3. ed + (не проходит 3... Крd8 4. de Кc5 5. c7 +) 3... Сe7 4. dc Кc5 5. С:f6 gf 6. Сf5! Фc7 7. b4 Ке6 8. Фh5 Kg7 9. Cd7 + Крf8 10. Фh6 d5 11. Л:e7! Кр:e7 12. Лe1 + Крf8 13. Ф:f6 Кpg8 14. Лe7 Лf8 15. Се6! Ф:e7 16. Ф:e7 fe 17. c7 h5 18. Ф:f8 +! Черные сдались. Такой победой мог бы гордиться и Михаил Таль.

Ответы, указания, решения



О пользе нелепостей

3. Пусть существует такое число M . Тогда $M = 21a + 1$ и $M = 14b + 3$, откуда $21a + 1 = 14b + 3$, $7(3a - 2b) = 2$, что невозможно.

9. Нелезя.

Допустим, что можно. Тогда полупериметр песочницы будет равен 5,5 м, но это невозможно, поскольку все доски имеют целочисленные длины.

10. Нелезя.

Допустим, что можно. Тогда существуют такие натуральные числа x, y и z , что

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 20, \\ x + y + z = 7. \end{cases}$$

Для выполнения первого равенства необходимо, чтобы нечетное число слагаемых (одно или три) в его левой части были четными; в обоих этих случаях левая часть второго равенства будет числом четным. Следовательно, таких чисел x, y, z не существует, то есть размер невозможен.

Колебания

1. $T = 2T_0/3$.

2. $T = 2\pi \sqrt{\frac{2m+M}{2k}}$.

3. $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{g(S_1+S_2)}}$.

4. Зависимость тока от времени будет иметь вид

$$i = \frac{I_m}{\sqrt{\epsilon}} \sin \frac{\omega}{\sqrt{\epsilon}} t.$$

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математика

Вариант 2

1. $\{-3; 2\}$. 2. $x = \pi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). 3. $|ED| = 3\sqrt{3}$.
4. При $c = 8$ площадь треугольника будет наибольшей и она равна $\frac{1}{8}$. 5. $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$.

Вариант 3

1. $\{4\}$. 2. $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi l}{3}$ ($k, l \in \mathbb{Z}$). 3. $B\left(\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{16}{3}(\sqrt{3}-1)\right)$. Указание. Пусть x — абсцисса точки B . Нужно найти такое x из отрезка $[0; 4]$, при котором площадь треугольника ABC принимает наибольшее значение, то есть принимает наибольшее значение функции $S(x) = \frac{(x+4)(4x-x^2)}{2}$. 4. $\widehat{BCA} = \arccos \sqrt{2(1-S)}$.

Указание. Пусть BD — высота треугольника ABC . Из подобия треугольников AMC и ABD имеем

$$\frac{1-S}{1} = \frac{S_{AMC}}{S_{ABD}} = \frac{|AM|^2}{|AB|^2} = \frac{|AD|^2}{|AB|^2} = \cos^2(\widehat{BAC}) = \cos^2(\widehat{BCA}).$$

5. $a = \frac{2}{3}$.

Указание. Сначала, рассуждением от противного, покажем, что второе уравнение при любом допустимом значении a более одного решения иметь не может. Первое уравнение — квадратное с дискриминантом $(9a^2 - 4)^2$, и поэтому при всех $a \neq \pm \frac{2}{3}$ имеет два решения.

Задача сводится к анализу двух точек $a = -\frac{2}{3}$ и $a = \frac{2}{3}$.

Вариант 4

1. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$). 2. $\min_{x \in \mathbb{R}} y(x) = -y(-5) = -135$; $\max_{x \in \mathbb{R}} y(x) = y(-2) = 54$.

3. $\{3; 5\}$. 4. $|AB| = |CD| = 5$ м; $|AD| = |BC| = 8$ м. Указание. Из треугольника OMC (рис. 1) находим $|MC| = 3$ м $= |CN|$, $|BC| + |CD| = 13$ м, поэтому $|BD| = |BK| + |KD| = |BM| + |DN| = |BC| - 3 + |DC| - 3 = 7$ м. По теореме косинусов из треугольника BCD имеем $49 = |BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - |BC| \cdot |CD|$. Осталось решить систему уравнений

$$\begin{cases} |BC| + |CD| = 13, \\ |BC|^2 + |CD|^2 - |BC| \cdot |CD| = 49. \end{cases}$$

5. $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Указание. Решения задачи есть решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \sin^3 x - 3 \cos^2 x + 7 \sin x - \cos 2x + 1 = 0, \\ \cos^2 x + 3 \cos x \cdot \sin 2x - 8 \sin x = 0. \end{cases}$$

После замены $t = \sin x$ получим систему

$$\begin{cases} 3t^3 + 5t^2 + 7t - 3 = 0, \\ 6t^3 + t^2 + 2t - 1 = 0, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} 9t^2 + 12t - 5 = 0, \\ 6t^3 + t^2 + 2t - 1 = 0. \end{cases}$$

Решением последней системы будет $t = \frac{1}{3}$.

Вариант 5

1. $\{(1; -5), (5; -1)\}$. 2. $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$

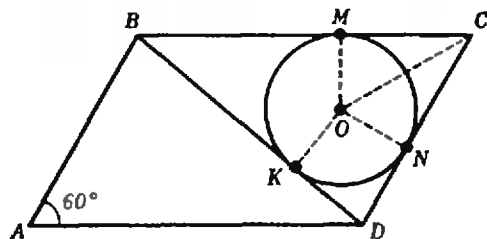


Рис. 1.

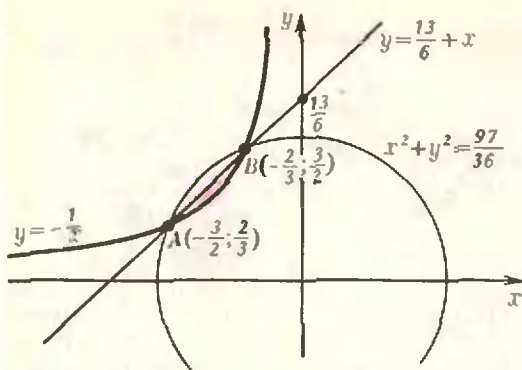


Рис. 2.

$(n \in \mathbf{Z})$. 3. $\frac{\pi+3}{6\pi}$. 4. $\{3; \frac{7}{2}\} \cup \{4; +\infty\}$.

Вариант 6

1. $2\sqrt{\frac{1}{3}}$. 2. $\{1 + \sqrt{3}\}$. 3. $\frac{1}{12} \pi R^2$.

4. $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$). Указание. Левую часть уравнения разложить как сумму кубов; в результате получится биквадратное уравнение относительно $\sin x$ или $\cos x$.

5. $(-\frac{2}{3}; \frac{3}{2})$, $(-\frac{3}{2}; \frac{2}{3})$. Указание.

$$|a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \text{ поэтому } \left| y + \frac{1}{x} \right| + \left| \frac{13}{6} + x - y \right| = \frac{13}{6} + x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \frac{1}{x} \geq 0 \\ \frac{13}{6} + x - y > 0 \end{cases}$$

Таким образом, нужно найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} y + \frac{1}{x} > 0; \\ \frac{13}{6} + x - y > 0, \\ x^2 + y^2 = \frac{97}{36}, \\ x < 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

На рисунке 2 закрашена область, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} y + \frac{1}{x} > 0, \\ \frac{13}{6} + x - y > 0, \\ x < 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Вариант 7

1. $\{-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\}$. 2. $2\sqrt{\frac{1}{6}}$. 3. 10 см. 4. 170 кг.

5. При $k = -1$, $x_1 = 2\pi m$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($m, n \in \mathbf{Z}$).

При $k = 0$, $x = \pm \frac{2}{3} \pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$). При $k = 1$

$x = \pi \pm \arccos \frac{\sqrt{7}-1}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$). Указание.

Уравнение привести к квадратному относительно $\cos x$. Отбросить те значения параметра k , при которых дискриминант получив-

шегося квадратного уравнения отрицателен или корни по модулю превосходят единицу.

Вариант 8

1. $]-\infty; 0[$. 2. 9 см, 12 см, 15 см.

3. $\{(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}), (2; y)\}$, где y — любое действительное число. Указание.

Вычесть из первого уравнения второе. 4. $3\sqrt{3}$.

5. 8. Указание. За единицу длины выберем расстояние между точками обгона пешехода следующими друг за другом автобусами.

Положим $S = |AB|$. Тогда по условию $2 < S < 4$, $3 < 2S < 5$, откуда $2 < S < \frac{5}{2}$ и $8 < 4S < 10$,

то есть $4S = 9$. Но $|AD| = 4S = k + 1$, где k — количество автобусов, которые обогнали третьего пешехода в пути между A и D .

Вариант 9

1. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ ($n \in \mathbf{Z}$). 2. $\{(3; 1), (\frac{5}{3}; \frac{11}{3})\}$.

3. $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$. 4. 2. 5. $(\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{4} + \pi k)$, где

$k \in \mathbf{Z}$. Указание. Левая часть неравенства равна

$$2(2p-1)^4(1-\sin 2t) + (1+\sin 2t).$$

Из того, что $|\sin 2t| < 1$ и $(2p-1)^4 > 0$, вытекает неотрицательность каждого слагаемого в полученном выражении.

Физика

Физический факультет

1. $v = \frac{|F|(m_1 + m_2)}{2m_1 m_2} t$.

2. $A = \frac{m_1 m_2 |\vec{v}|^2}{2(m_1 + m_2)} = 48$ Дж.

3. $h = \frac{H}{(1 + m/M)^2}$.

4. $p = p_0 \frac{T}{T_0} + \frac{MRT}{\mu V} \approx 190$ кПа.

5. $A = \frac{m}{\mu} R T_0 \frac{k-1}{k}$.

6. $T_2 = \frac{c_1 M T_1 + c p V \mu / R}{c_1 M + \frac{c p V \mu}{R T}}$.

7. $q = 2/3 C \mathcal{E} = 4$ мкКл.

8. $|\vec{B}| = \frac{2|F|r}{a \mathcal{E}} = 2$ Тл; $|\vec{v}_{\max}| = \frac{\mathcal{E}^2}{4|F|r} = 7,5$ м/с.

Указание. При установившейся скорости

$$|\vec{F}| = I a |\vec{B}|, \text{ где } I = \frac{\mathcal{E} - |\vec{B}| a |\vec{v}|}{r}. \text{ Отсюда}$$

найдите $|\vec{B}|$ как функцию от $|\vec{v}|$ и исследуйте ее на максимум.

9. $n_{\min} = \sqrt{2} = 1,4$.

10. $x = a(n-1)a$.

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $s = \frac{\mu M g}{2(M-m)} t^2 \approx 2,8 \cdot 10^{-2} t^2$.

2. $\mu < \frac{a}{\sqrt{4R^2 - a^2}} \approx 0,05$.
3. $k = \frac{mg \lg a/2}{l(1 - \sqrt{2} \sin a/2)} \approx 10^2 \text{ Н/м}$.
4. $p' - p = 100 \text{ кПа}$.
5. $\epsilon = \frac{q_1 q_2}{(q_1 + q_2)^2} \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_1 r_2} = 1,6$.
6. а) $R_{II} = 1,5 R$; б) $R_{II} = R$.
7. $I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 + k\pi R^2}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} \approx 0,25 \text{ А}$.
8. $H = \frac{l \lg a}{l - \frac{\sin a}{\sqrt{n^2 - \cos^2 a}}} \approx 0,6 \text{ м}$.
9. $s = \frac{R^2 - 4a^2}{2a} = 0,25 \text{ м}$.
10. $s = 2L - l + \frac{Fl}{F + l} = 1,82 \text{ м}$.

Географический, геологический и химический факультеты, факультет почвоведения

1. $a = \frac{2s}{t_1^2} = 0,1 \text{ м/с}^2$.
2. 1) $|\vec{v}| = \left| \vec{v}_0 - \frac{mg}{M+m} t \right| = 4,9 \text{ м/с}$; скорость \vec{v} направлена вправо; 2) $s = |\vec{v}_0| t - \frac{mg}{M+m} \frac{t^2}{2} = 0$.
3. $v_1 = v_0 \sqrt{\frac{g-a}{k}} = 1,4 \text{ Гц}$.
4. $\Delta h = h_1 \frac{(a-2\beta)\Delta t}{1+2\beta\Delta t} \approx h_1 \Delta t (a-2\beta) = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.
5. $A = -R(T_2 - T_1)(V_2/V_1 - 1)$.
6. $q = \epsilon_0 \epsilon S U \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} \approx 9,7 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$.
7. $Q_{1n} = Q_{nc} = Q_{cn} = Q_{1n} = \frac{U^2}{4R} = 10 \text{ Дж}$;
 $Q_{nn} = 0$; $Q_{nc} = \frac{U^2}{2R \sin \alpha} \approx 23,1 \text{ Дж}$.
8. $t = \frac{C(\mathcal{E} - \mathcal{E}_1)}{P} = 10 \text{ ч}$.
9. $x = 2a \cos \alpha \approx 34 \text{ см}$.
10. $x = a \frac{d}{d-f} = 3 \text{ см}$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 2)

1. 24 представителя.
2. В ситуации, изображенной на рисунке 3, количество воды в цилиндрическом сосуде равно половине его емкости. Налием таким способом в кастрюлю 3 л, в банку — 2 л. Перельем теперь воду из кастрюли в банку — в кастрюле останется 1 л.
3. Отложим временно из двух рублей сдачи копейку, «двушку» и трехкопеечную монету.

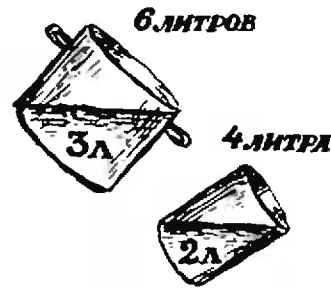


Рис. 3.

Из остальных монет будем брать по одной, пока не наберем не меньше 96 коп. и не больше рубля. Если набрался рубль — все в порядке. Если же набралось 96 коп. — добавим из отложенных трех монет 1 коп. и 3 коп.; 97 коп. — добавим 3 коп.; 98 коп. — добавим 2 коп.; 99 коп. — добавим 1 коп.

Номер подготовили:

А. Виденкин, А. Егоров, И. Кламова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихлович

Номер оформили:

М. Дубих, Е. Зеленая, Т. Кальченко, Г. Красников, Э. Назиров, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Манарова

Корректор П. Дорыхова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.

«Квант», тел. 231-83-62

Сдано в набор 23.1.81.

Подписано в печать 26.2.81

Печать офсетная

Бумага 70 × 108 1/16. Физ. печ. л. 4

Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 5,97 Т-115707

Цена 30 коп. Заказ 77

Тираж 236782 экз.

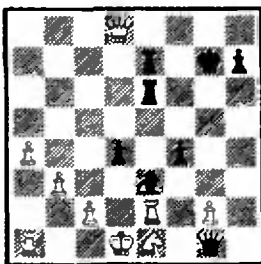
Чеховский полиграфический комбинат
 Спозимлиграфпрома
 Государственного комитета СССР
 по делам издательства, полиграфии
 и книжной торговли,
 г. Чехов Московской области

ЕЩЕ ТРИ МАТЧА ЛАСКЕРА

Продолжаем наш рассказ о матчах за мировую шахматную корону. В восьмом по счету поединке встретились Ласкер и Тарраш. В творческом отношении гроссмейстер Тарраш многие годы был противником чемпиона мира. Он искал в шахматах абсолютную истину, в любой позиции стремился сделать лучший ход. Ласкер отрицал такой метод игры и к каждому партнеру стремился подобрать индивидуальные ключи. Как и в трех предыдущих матчах, Ласкер добился убедительной победы (со счетом 10,5:5,5).



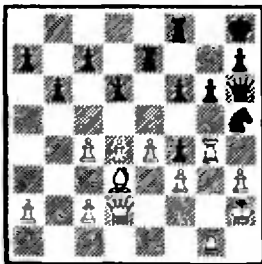
Эм. Ласкер (1868—1941)



Тарраш — Ласкер

40...f3! (40...c5! 41. Л:е6 Л:е6 42. Фd7+ приводило к вечному шаху) 41. g4 Сg5. Белые сдались (42. Л:е6 Л:е6 43. Фd7+ не спасает из-за 43...Лe7).

В 1909 году Яновский сыграл винчю показательный матч с чемпионом мира. Успех окрылил его, и он вызвал Ласкера на матч. Однако ничего, кроме разочарований, этот матч Яновскому не принес — Ласкер выиграл матч со счетом 8:2.

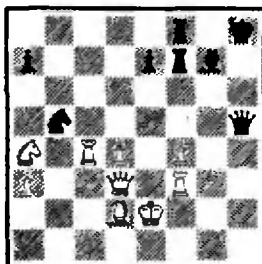


Яновский — Ласкер

Положение белых выглядит довольно прочным, но в результате тонкого перевода коня черные получают решающую атаку. 24...Kg7! 25. c3 (упорнее 25. d5) 25...Кe6

26. Cf1 f5 27. Л4g2 Л16! 28. Cd3 g5! 29. Лh1 (эффектно завершался поединок после 29. e4 Ф:h3+!! 30. Кр:h3 Лh6+ 31. Кpg4 Лh4x) 29...g4! 30. Ce2 Kg5 (в случае 30...Ф:h3+ 31. Кpg1 черный ферзь в западне) 31. f3 32. Лg3 fe2. Белые сдались.

В десятом, юбилейном матче Ласкер отставил свой титул в борьбе с К. Шлехтером. Первоначально планировалось провести тридцать партий, однако из-за недостатка средств пришлось ограничиться десятью. Учитывая такую короткую дистанцию, Ласкер поставил условие, по которому претенденту для общей победы необходим был перевес не менее чем в два очка. Перед последней встречей Шлехтер был впереди 5:4. Вот критический момент последней партии.

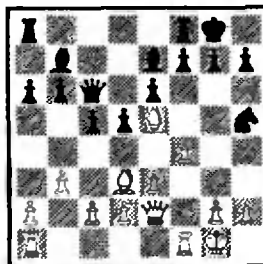


Ласкер — Шлехтер

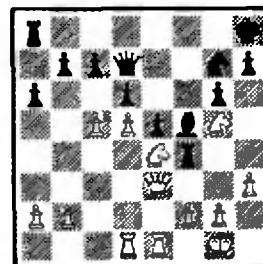
Продолжая 35...Jd8 36. Ce3 e5! 37. d5 Kd6! или 37. Лc5 K:d4+ 38. C:d4 Л:f4, черные сохраняли все шансы на победу. Шлехтер жертвует качество, упуская

шансы стать третьим шахматным королем. 35...Л:f4? 36. C:f4 Л:f4 37. Лc8+ Cf8 38. Кpf2! Фh2+ (после 38...Ф14+ 39. Кpg2 Фg4+ 40. Лg3 Ф:c8 41. Фg6 черный король получал мат) 39. Кре1 Фh1+ (выигрыша у черных уже не было, но ничью сохраняло 39...Фh4+ 40. Кpd2 Фh2+ 41. Кре3 Л:f3+ 42. Кр:f3 Фh3+ 43. Кре2 Ф:c8) 40. Лf1 Фh4+ 41. Кpd2 Л:f1 42. Ф:f1 Ф:d4+ 43. Фd3 Фf2+ 44. Кpd1 Kd6 45. Лc5. Имея лишнее качество, белые выиграли на 71-м ходу, счет сравнялся и Ласкер сохранил звание чемпиона мира.

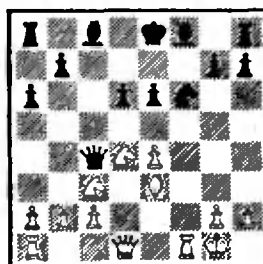
В качестве конкурсных заданий мы предлагаем вам сегодня найти три знаменитые комбинации, принадлежащие Эм. Ласкеру.



1. Белые начинают и выигрывают.



2. Белые начинают и выигрывают.



3. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 30 апреля 1981 г.

Орнамент, изображенный на этой странице обложки, получается последовательным повторением двух простых операций. Вначале закрасенный правильный шестиугольник отражают относительно каждой из его сторон. Полученный «цветочек», состоящий из исходного шестиугольника и шести его конгруэнтных отпечатков того же цвета, вписывают в правильный шестиугольник больших размеров (при этом образуются незакрашенные участки), с которым повто-

ряют операцию отражения относительно каждой стороны (с сохранением раскраски). Новую фигуру вновь вписывают в правильный шестиугольник и т. д. (Изображенный на обложке орнамент является результатом трех шагов.)

Аналогичные интересные орнаменты можно получить, взяв в качестве исходного n -угольника правильный треугольник или квадрат. Постарайтесь их нарисовать.

В. Чванов

